



華東師範大學

EAST CHINA NORMAL UNIVERSITY

<http://math.ecnu.edu.cn/~jypan>

第七讲

函数插值

为什么插值

大多数实际问题都可用函数来表示某种内在规律的数量关系，但该函数通常无法给出，只有通过实验或观测得到的数据表，如何根据这些数据推测或估计其它点的函数值？

例：已测得在某处海洋不同深度处的水温如下：

深度 (M)	466	741	950	1422	1634
水温 (°C)	7.04	4.28	3.40	2.54	2.13

根据这些数据，希望合理地估计出其它深度（如 500、600、800米...）处的水温。

数学工具：插值

什么是插值

已知函数 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有定义, 且已经测得在点

$$a \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_n \leq b$$

处的函数值为 $y_0 = f(x_0), \dots, y_n = f(x_n)$

如果存在一个 **简单易算** 的函数 $p(x)$, 使得

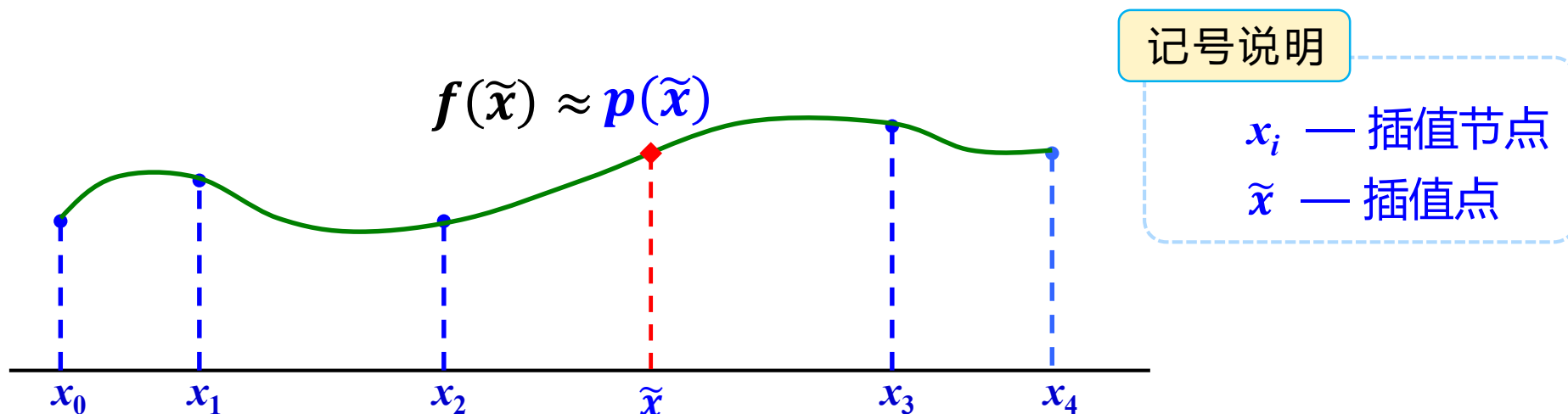
$$p(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, n$$

则称 $p(x)$ 为 $f(x)$ 的插值函数。求插值函数 $p(x)$ 的方法就称为 **插值法**。

† $[a, b]$ 为插值区间, x_i 为插值节点, $p(x_i) = f(x_i)$ 为插值条件

† 插值节点无需递增排列, 但必须确保互不相同!

插值图示



- † 求出插值函数 $p(x)$ 后，对于任意给定的一点 $\tilde{x}$ ，我们就可以用 $p(\tilde{x})$ 来近似 $f(\tilde{x})$ 的值，这就是插值的目的。
- † 插值是一种近似方法。
- † 在实际应用中，我们感兴趣的往往是某些点的值，而不一定是插值函数

常用的插值方法有哪些

常用插值方法

- 多项式插值: $p(x)$ 为多项式, 多项式最常用的插值函数
- 分段多项式插值: $p(x)$ 为分段多项式
- 三角插值: $p(x)$ 为三角函数
- 有理插值: $p(x)$ 为有理函数
-

† 可以看出, 不同插值方法的区别在于插值函数 $p(x)$ 的选取。

† 我们主要介绍前两种插值方法, 其他插值方法的原理是类似的。



目录页

Contents

1

多项式插值介绍

2

Lagrange 插值

3

差商与 Newton 插值

4

Hermite 插值

5

分段低次插值

6

三次样条插值



1

多项式插值

- ① 多项式插值介绍
- ② Lagrange 插值
- ③ 差商与 Newton 插值
- ④ Hermite 插值
- ⑤ 分段低次插值
- ⑥ 三次样条插值

- 什么是多项式插值
- 多项式插值的存在唯一性
- 线性插值（一次多项式）
- 抛物线插值（二次多项式）

什么是多项式插值

已知函数 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上 $n + 1$ 个点

$$a \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_n \leq b$$

处的函数值为 $y_0 = f(x_0), \dots, y_n = f(x_n)$

求次数 不超过 n 的多项式

$$p(x) = c_0 + c_1x + \cdots + c_nx^n$$

使得

$$p(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, \dots, n$$

注意： $p(x)$ 的次数有可能小于 n

多项式插值存在唯一性

定理（多项式插值的存在唯一性）

满足上述条件的多项式 $P(x)$ 存在且唯一。

证明：自行练习（*Vandermonde* 行列式）

† 该定理的证明过程也给出了一种求 $p(x)$ 的方法，但需要求解一个线性方程组，后面将给出更简单的计算方法。

线性插值 (一次多项式)

例 (线性插值) : 求一次多项式 $p(x)$, 满足

$$p(x_0) = y_0, \quad p(x_1) = y_1$$

$$\begin{array}{l} p(x_0) = y_0 \\ p(x_1) = y_1 \end{array} \quad \longrightarrow \quad p(x) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} (x - x_0) \quad \longleftarrow \quad \text{点斜式}$$

重新整理

$$p(x) = y_0 \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + y_1 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

我们注意到, $p(x)$ 是两个一次多项式的线性组合

$$\text{令 } l_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}, \quad l_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

$$\text{则 } p(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x)$$

能观察到什么?

$$l_0(x), l_1(x) \text{ 满足: } l_0(x_0) = 1, \quad l_0(x_1) = 0, \quad l_1(x_0) = 0, \quad l_1(x_1) = 1$$

抛物线插值（二次多项式）

例（抛物线插值）：求二次多项式 $p(x)$ ，满足

$$p(x_0) = y_0, \quad p(x_1) = y_1, \quad p(x_2) = y_2$$

思路：构造三个二次多项式 $l_0(x), l_1(x), l_2(x)$ ，满足

$$l_0(x_0) = 1, \quad l_0(x_1) = 0, \quad l_0(x_2) = 0$$

$$l_1(x_0) = 0, \quad l_1(x_1) = 1, \quad l_1(x_2) = 0$$

$$l_2(x_0) = 0, \quad l_2(x_1) = 0, \quad l_2(x_2) = 1$$



$$p(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + y_2 l_2(x)$$



将问题转化为：如何构造 $l_0(x), l_1(x), l_2(x)$ ？



華東師範大學

EAST CHINA NORMAL UNIVERSITY

第七讲

函数插值

—— Lagrange 插值



2

Lagrange 插值

- ① 多项式插值介绍
- ② Lagrange 插值
- ③ 差商与 Newton 插值
- ④ Hermite 插值
- ⑤ 分段低次插值
- ⑥ 三次样条插值

- 基函数插值法
- Lagrange插值基函数
- 插值余项的推导
- Lagrange插值基函数的重要性质

什么是基函数插值法

记

$H_n(x) = \{\text{次数不超过 } n \text{ 的多项式的全体}\}$

$n+1$ 维
线性空间

设 $z_0(x), z_1(x), \dots, z_n(x)$ 是 $H_n(x)$ 的一组基, 则插值多项式可表示为

$$p(x) = a_0 z_0(x) + a_1 z_1(x) + \cdots + a_n z_n(x)$$

需要解决的两个问题

- ① 寻找合适的基函数
- ② 确定插值多项式在这组基下的线性表出系数



这种通过基函数来构造插值函数的方法就是 **基函数插值法**

† 存在唯一性定理中是以 $1, x, x^2, \dots, x^n$ 为插值基函数

Lagrange 插值

Lagrange 插值 (法)

用 Lagrange 插值基函数来计算插值多项式的方法。

定义：设 $l_k(x)$ 是 n 次多项式，且在节点 $x_0, x_1, \dots, x_n$ 上满足

$$l_k(x_i) = \begin{cases} 1, & i = k \\ 0, & i \neq k \end{cases} \quad i = 0, 1, 2, \dots, n$$

则称 $l_k(x)$ 为节点 $x_0, x_1, \dots, x_n$ 上的 n 次 Lagrange 插值基函数
($k=0, 1, \dots, n$)

† $l_0(x), l_1(x), \dots, l_n(x)$ 构成 $H_n(x)$ 的一组基 (证明自行练习)

† $l_0(x), l_1(x), \dots, l_n(x)$ 由插值节点所唯一确定

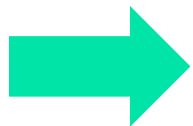
Lagrange 基函数的计算

根据定义，可设

$$l_k(x) = \alpha_k (x - x_0) \cdots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \cdots (x - x_n)$$

其中 α_k 是待定系数。将 $l_k(x_k) = 1$ 代入可求得

$$\alpha_k = \frac{1}{(x_k - x_0) \cdots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \cdots (x_k - x_n)}$$



$$\begin{aligned} l_k(x) &= \frac{(x - x_0) \cdots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \cdots (x - x_n)}{(x_k - x_0) \cdots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \cdots (x_k - x_n)} \\ &= \prod_{i=0, i \neq k}^n \frac{x - x_i}{x_k - x_i} \end{aligned}$$

$$(k=0, 1, \dots, n)$$

Lagrange 插值

由于 $l_0(x), l_1(x), \dots, l_n(x)$ 构成 $H_n(x)$ 的一组基, 因此可设插值多项式:

$$p(x) = a_0 l_0(x) + a_1 l_1(x) + \cdots + a_n l_n(x)$$

将插值条件 $p(x_i) = y_i, i = 0, 1, \dots, n$ 代入, 可得 $a_i = y_i, i = 0, 1, \dots, n$


$$p(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + \cdots + y_n l_n(x) \triangleq L_n(x)$$

$L_n(x)$ 就称为 $f(x)$ 的 Lagrange 插值多项式。

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^n y_k l_k(x) = \sum_{k=0}^n y_k \prod_{i=0, i \neq k}^n \frac{x - x_i}{x_k - x_i}$$

† Lagrange 插值的优点: 简单, 可以直接把插值多项式写出来!

线性插值

线性插值多项式（一次插值多项式）： $n = 1$

$$L_1(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) = y_0 \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + y_1 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

抛物线插值

抛物线插值多项式（二次插值多项式）： $n = 2$

$$\begin{aligned} L_2(x) &= y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + y_2 l_2(x) \\ &= y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} \end{aligned}$$

† n 次插值多项式的次数有时会低于 n ，比如二次插值中，如果三点共线，则 $L_2(x)$ 为直线

插值举例

例：已知函数 $y = \ln(x)$ 的函数值如下

x	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
$\ln(x)$	-0.9163	-0.6931	-0.5108	-0.3567	-0.2231

试分别用 线性插值 和 抛物线插值 计算 $\ln(0.54)$ 的近似值。

插值节点的选取：为提高计算精度，通常选取所需插值的点 x 邻近的节点

解：(1) 线性插值，取 $x_0=0.5$, $x_1=0.6$ 得

$$L_1(x) = y_0 \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + y_1 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = 0.1823x - 1.6046$$

将 $x=0.54$ 代入可得：

$$\ln(0.54) \approx L_1(0.54) = -0.6202$$

插值举例

(2) 抛物线插值, 取 $x_0=0.4$, $x_1=0.5$, $x_2=0.6$, 可得

$$\ln(0.54) \approx L_2(0.54) = -0.6153$$

Interp_Lagrange_01.m

 $\ln(0.54)$ 的精确值为: $-0.616186 \dots$

抛物线插值的误差比线性插值要小一些。



思考: 是不是插值多项式次数越高, 误差越小?

† 实际计算中, 可直接将插值点代入计算, 无需给出插值多项式表达式。

† Lagrange 插值简单方便, 易于计算机实现。

误差估计

插值余项:

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x)$$

定理: 设 $f(x) \in C^n[a, b]$ (n 阶连续可微), 且 $f^{(n+1)}(x)$ 在 (a, b) 内存在, 则对 $\forall x \in [a, b]$, 存在 $\xi_x \in (a, b)$ 使得

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \omega_{n+1}(x)$$

其中 $\omega_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)$

证明: 板书

† 注: 余项中的 ξ_x 是与 x 有关的。

† 当 $x = x_i$ 时, 结论显然成立, 因此只要证明 $x \neq x_i$ 的情形。

简要证明过程

由插值条件可知: $R_n(x_i)=0, i=0, 1, \dots, n$

因此, $R_n(x)$ 可写成 $R_n(x) = K(x)\omega_{n+1}(x)$

对任意给定的 $x \in [a, b]$ ($x \neq x_i, i=0, 1, \dots, n$), 构造 辅助函数

$$\varphi(t) \triangleq R_n(t) - K(x)\omega_{n+1}(t) = f(t) - L_n(t) - K(x)\omega_{n+1}(t)$$

则 $\varphi(t)$ 在 $[a, b]$ 中有 $n+2$ 个互不相同的零点: $x, x_0, \dots, x_n$

条件: $f(x) \in C^n[a, b]$, 且 $f^{(n+1)}(x)$ 在 (a, b) 内存在  $\varphi(t)$ 也具有此性质

由罗尔定理可知 $\varphi'(t)$ 在 (a, b) 内至少有 $n+1$ 个不同的零点。

**罗尔
定理**

设 $f(x) \in C[a, b]$, 且在 (a, b) 内可微; 若 $f(a) = f(b) = 0$, 则必存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f'(\xi) = 0$ 。

简要证明过程

再用一次罗尔定理, 可知 $\varphi''(t)$ 在 (a, b) 内至少有 n 个不同的零点。

以此类推, 可知 $\varphi^{(n+1)}(t)$ 在 (a, b) 内至少有一个零点, 设为 $\xi_x \in (a, b)$, 有

$$\varphi^{(n+1)}(\xi_x) = 0$$

又

$$\begin{aligned}\varphi^{(n+1)}(t) &= R_n^{(n+1)}(t) - K(x)\omega_{n+1}^{(n+1)}(t) \\ &= f^{(n+1)}(t) - L_n^{(n+1)}(t) - K(x)(n+1)! \\ &= f^{(n+1)}(t) - K(x)(n+1)!\end{aligned}$$

$$\xrightarrow{\quad} K(x) = \frac{\varphi^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \xrightarrow{\quad} R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \omega_{n+1}(x)$$

线性插值和抛物线插值的余项

线性插值的余项（两点插值， $n=1$ ）

$$R_1(x) = \frac{1}{2} f''(\xi_x)(x - x_0)(x - x_1)$$

抛物线插值的余项（三点插值， $n=2$ ）

$$R_2(x) = \frac{1}{6} f'''(\xi_x)(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

几点说明

- 余项公式只有当 $f(x)$ 的高阶导数存在时才能使用
- ξ_x 与 x 有关, 通常无法确定, 实际使用中通常是估计其上界

$$\text{若 } \max_{a \leq x \leq b} |f^{(n+1)}(x)| = M_{n+1}, \text{ 则 } |R_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n |x - x_i|$$

- 计算点 x 上的近似值时, 应尽量选取与 x 靠近插值节点

插值误差举例 (一)

例：已知函数 $y = \ln(x)$ 的函数值如下

x	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
$\ln(x)$	-0.9163	-0.6931	-0.5108	-0.3567	-0.2231

试估计用 线性插值 和 抛物线插值 计算 $\ln(0.54)$ 时的误差。

解：板书

解：(1) 线性插值余项

$$R_1(x) = \frac{f^{(2)}(\xi_x)}{2}(x - x_0)(x - x_1), \quad x_0=0.5, x_1=0.6, \xi_x \in (0.5, 0.6)$$

$$|f^{(2)}(\xi_x)| = |-\xi_x^{-2}| \leq 4$$


$$|R_1(0.54)| \leq |2(0.54 - 0.5)(0.54 - 0.6)| = 0.048$$

插值误差举例 (一)

(2) 抛物线插值余项

$$R_2(x) = \frac{f^{(3)}(\xi_x)}{3!} (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

$$x_0=0.4, x_1=0.5, x_2=0.6, \xi_x \in (0.4, 0.6) \quad \longrightarrow \quad |f^{(3)}(\xi_x)| \leq |2\xi_x^{-3}| = 31.25$$

$$\longrightarrow |R_2(0.54)| \leq \frac{31.25}{3!} |(0.54 - 0.4)(0.54 - 0.5)(0.54 - 0.6)| = \mathbf{0.00175}$$

$$|R_1(0.54)| \leq 0.048$$

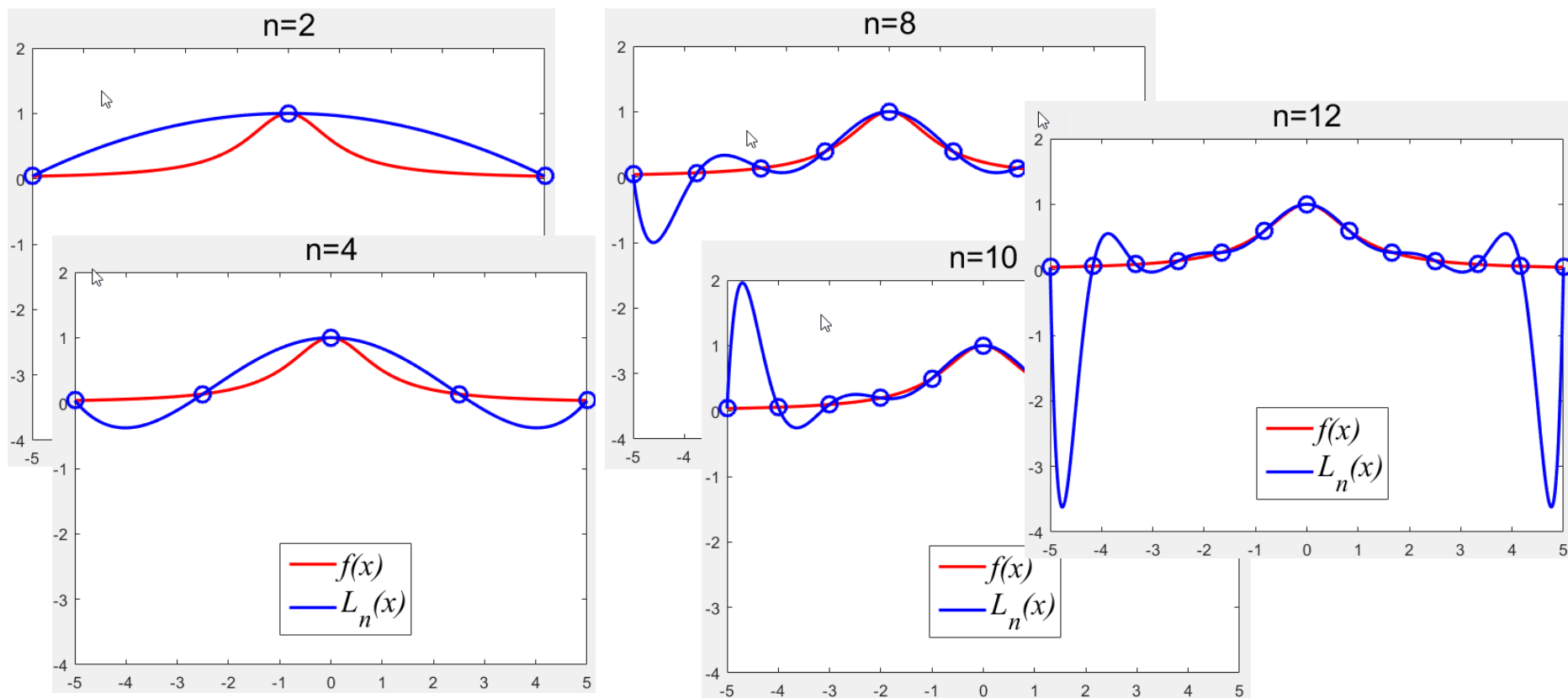
抛物线插值通常优于线性插值，但绝不是次数越高就越好！

插值误差举例

例：函数 $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ ，插值区间 $[-5, 5]$ ，取等距插值节点，

试画出插值多项式 $L_n(x)$ 的图像。

Interp_Lagrange_Runge.m



插值误差举例 (二)

例：设 $f(x) \in C^2[a,b]$ (二阶连续可导)，证明：

$$\max_{a \leq x \leq b} \left| f(x) - \left[f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a) \right] \right| \leq \frac{1}{8} M_2 (b - a)^2$$

其中

$$M_2 = \max_{a \leq x \leq b} |f''(x)|$$

证明：板书

证明：易知 $L_1(x) \triangleq f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a)$

是 $f(x)$ 关于点 $x_0=a, x_1=b$ 的线性插值多项式，由插值余项公式可知

$$|f(x) - L_1(x)| = \left| \frac{f^{(2)}(\xi_x)}{2} (x - a)(x - b) \right| \leq \frac{1}{2} M_2 |(x - a)(b - x)| \leq \frac{1}{8} M_2 (b - a)^2$$

$$x \in [a, b]$$

Lagrange插值基函数的重要性质

性质一： 若 $f(x)$ 是一个次数 $\leq n$ 的多项式，则有 $f^{(n+1)}(x) \equiv 0$ ，故

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x) \equiv 0$$

即 n 次插值多项式对于次数 $\leq n$ 的多项式是精确成立的。

性质二： 设 $f(x) = x^k$ ， $k \leq n$ ，则有

$$R_n(x) = x^k - \sum_{j=0}^n x_j^k l_j(x) = 0 \quad \longleftrightarrow \quad x^k = \sum_{j=0}^n x_j^k l_j(x)$$

特别地，当 $k = 0$ 时有

$$\sum_{j=0}^n l_j(x) = 1$$

插值误差举例

例：设 $l_i(x)$ 是关于点 $x_0, x_1, \dots, x_5$ 的 Lagrange 插值基函数，证明：

$$\sum_{i=0}^5 (x_i - x)^2 l_i(x) = 0$$

证明：板书

证明：直接展开，并利用 Lagrange 插值基函数的性质可得

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^5 (x_i - x)^2 l_i(x) &= \sum_{i=0}^5 x_i^2 l_i(x) - 2x \sum_{i=0}^5 x_i l_i(x) + x^2 \sum_{i=0}^5 l_i(x) \\ &= x^2 - 2x^2 + x^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$