$$f(x) = 0$$

6.4 Newton 法

6-1-1 基本思想与迭代格式

基本思想：线性化

将 $f(x)$ 在 x_k 处 Taylor 展开可得

$$f(x) = f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x - x_k)^2$$

忽略二次项, 可得 $f(x) \approx P(x)$, 其中

$$P(x) \triangleq f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k).$$

用 $P(x)$ 的零点来近似 $f(x)$ 的零点, 并将其记为 x_{k+1}.

6-1-1 基本思想与迭代格式

基本思想：线性化

将 $f(x)$ 在 x_k 处 Taylor 展开可得

$$f(x) = f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x - x_k)^2$$

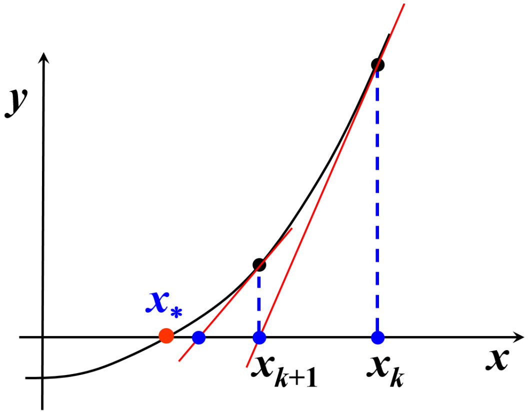
忽略二次项，可得 $f(x) \approx P(x)$，其中

$$P(x) \triangleq f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k).$$

用 $P(x)$ 的零点来近似 $f(x)$ 的零点，并将其记为 x_{k+1}.

$$\boxed{x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}}$$

几何意义



✍ 为了使得 Newton 法能顺利进行, 一般要求 $f'(x) \neq 0$.

算法 Newton 法

给定迭代初值 x_0, 精度要求 ε 和最大迭代步数 IterMax
if $|f(x_0)| < \varepsilon$, **then**
  输出近似解 x_0, 停止迭代
end if
for $k = 1$ to IterMax **do**
  计算 $x_1 = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$
  if $|x_1 - x_0| < \varepsilon$ 或 $|f(x_1)| < \varepsilon$, **then**
    输出近似解 x_1, 停止迭代 % 算法收敛
  end if
  $x_0 = x_1$
end for

6-1-2 Newton 法的收敛性

由迭代格式可知, Newton 法也是不动点迭代, 对应的迭代函数为

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

直接计算可得

$$\varphi'(x_*) = 1 - \frac{f'(x_*)\cdot f'(x_*) - f(x_*)f''(x_*)}{\left(f'(x_*)\right)^2} = 0, \quad \varphi''(x_*) = \frac{f''(x_*)}{f'(x_*)}.$$

6-1-2 Newton 法的收敛性

由迭代格式可知, Newton 法也是不动点迭代, 对应的迭代函数为

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

直接计算可得

$$\varphi'(x_*) = 1 - \frac{f'(x_*)\cdot f'(x_*) - f(x_*)f''(x_*)}{(f'(x_*))^2} = 0, \quad \varphi''(x_*) = \frac{f''(x_*)}{f'(x_*)}.$$

定理 设 x_* 是 $f(x)$ 的零点, 且 $f'(x_*) \neq 0$, 则 Newton 法 至少二阶局部收敛:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{x_{k+1} - x_*}{(x_k - x_*)^2} = \frac{\varphi''(x_*)}{2} = \frac{f''(x_*)}{2f'(x_*)}.$$

(板书)

例 编写程序，用 Newton 法求 $f(x) = xe^x - 1$ 的零点. (NLS_Newton_01.m)

解. 迭代格式为

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{x_k e^{x_k} - 1}{e^{x_k}(x_k + 1)}.$$

取初值 $x_0 = 0.5$, 迭代结果见下表.

k	x	$\lvert f(x)\rvert$
	0.50000000	1.76e-01
1	0.57102044	1.07e-02
2	0.56715557	3.39e-05
3	0.56714329	3.41e-10
4	0.56714329	2.22e-16

从表中数据可以看出, Newton 法迭代 4 步就达到机器精度了, 收敛速度非常快. □

例 用 Newton 法求 $f(x)=x^2-C=0$ 的正根, 并判断收敛性, 其中 $C>0$.

(板书)

例 用 Newton 法求 $f(x) = x^2 - C = 0$ 的正根, 并判断收敛性, 其中 $C > 0$.

(板书)

? 思考: 如果 $x_0 < 0$, 则结果会怎样?

例 用 Newton 法求 $f(x) = x^2 - C = 0$ 的正根, 并判断收敛性, 其中 $C > 0$.

(板书)

? 思考: 如果 $x_0 < 0$, 则结果会怎样?

✍ 一般来说 Newton 法只是局部收敛, 如果初值离真解太远可能就不收敛, 因此初值的选取很重要但也比较困难. 幸运得是, 对于计算平方根, Newton 法是全局收敛的, 因此是安全的.

几点说明

Newton 法的优点是收敛速度快 (至少二阶局部收敛), 特别是当迭代点充分靠近精确解时. 但缺点是

- 对重根收敛速度较慢, 只有线性收敛
- 对初值的选取很敏感, 要求初值相当接近真解
- 每一次迭代都需要计算导数, 难度和工作量都可能会比较大

6-1-3 简化 Newton 法

简化 Newton 法 的主要目的是避免每次的求导运算.

6-1-3 简化 Newton 法

简化 Newton 法 的主要目的是避免每次的求导运算.

基本思想

- 用 $f'(x_0)$ 替代所有的 $f'(x_k)$, 这样就只需计算一次导数.

6-1-3 简化 Newton 法

简化 Newton 法的主要目的是避免每次的求导运算.

基本思想

- 用 $f'(x_0)$ 替代所有的 $f'(x_k)$, 这样就只需计算一次导数.

对应的迭代格式为

$$\boxed{x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_0)}}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

6-1-3 简化 Newton 法

简化 Newton 法 的主要目的是避免每次的求导运算.

基本思想

- 用 $f'(x_0)$ 替代所有的 $f'(x_k)$, 这样就只需计算一次导数.

对应的迭代格式为

$$\boxed{x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_0)}}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

这样做的代价是收敛速度只有 **线性收敛**.

6-1-4 Newton 下山法

Newton 下山法 是为了克服 Newton 法局部收敛的这个缺点.

6-1-4 Newton 下山法

Newton 下山法 是为了克服 Newton 法局部收敛的这个缺点.

基本思想

要求每一步迭代满足下降条件

$$
|f(x_{k+1})| < |f(x_k)|
$$

即保持函数的绝对值是下降的, 这样就能保证全局收敛性.

6-1-4 Newton 下山法

Newton 下山法 是为了克服 Newton 法局部收敛的这个缺点.

基本思想

要求每一步迭代满足下降条件

$$|f(x_{k+1})| < |f(x_k)|$$

即保持函数的绝对值是下降的, 这样就能保证全局收敛性.

具体做法是加入一个 **下山因子** λ, 即

$$\boxed{x_{k+1} = x_k - \lambda \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

下山因子 λ 的取法: 从 $\lambda = 1$ 开始, 逐次减半, 直到满足下降条件为止.

6-1-5 重根情形

设 x_* 是 $f(x)=0$ 的 m $(m \geq 2)$ 重根, 即

$$f(x)=(x-x_*)^m g(x), \quad g(x_*) \neq 0$$

6-1-5 重根情形

设 x_* 是 $f(x)=0$ 的 m $(m\geq 2)$ 重根, 即

$$\boxed{f(x)=(x-x_*)^m g(x), \quad g(x_*)\neq 0}$$

方法一: 直接使用 Newton 法, 迭代函数为

$$\boxed{\varphi(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}},$$

则可得

$$\varphi'(x_*)=1-\frac{1}{m}\neq 0,$$

因此, 只有局部线性收敛.

方法二: 用 **改进的 Newton 法**, 选取迭代函数为

$$\boxed{\varphi(x) = x - m\frac{f(x)}{f'(x)}},$$

则可得

$$\varphi'(x_*) = 0,$$

因此, 至少二阶局部收敛. 但缺点是需要知道 m 的值.

方法三: 构造一个等价方程, 使得 x_* 是该等价方程的单重根, 然后用 Newton 法求解. 一种简单的构造方法是令

$$\mu(x) \triangleq \frac{f(x)}{f'(x)},$$

则 x_* 是 $\mu(x)$ 的单重零点. 用 Newton 法求解, 迭代函数为

$$\boxed{\varphi(x) = x - \frac{\mu(x)}{\mu'(x)} = x - \frac{f(x)f'(x)}{[f'(x)]^2 - f(x)f''(x)}}.$$

易知, 该迭代格式至少二阶局部收敛. 但缺点是需要计算二阶导数.

例 编写程序, 分别用以上三种方法计算 $f(x) = x^4 - 4x^2 + 4 = 0$ 的二重根 $x_* = \sqrt{2}$.

(`NLS_Newton_02.m`)

$$f(x) = 0$$

6.5 割线法与抛物线法

6-2-1 割线法

目的: 避免计算导数, 并且尽可能地保持较高的收敛性 (即超线性收敛).

割线法 (Secant Method) 也称 **弦截法**, 主要思想是 **用差商代替微商**, 即

$$f'(x_k) \approx f[x_{k-1}, x_k] = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$$

代入 Newton 法即可得 **割线法** 迭代格式:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})} f(x_k), \quad k = 1, 2, \ldots.$$

6-2-1 割线法

目的: 避免计算导数, 并且尽可能地保持较高的收敛性 (即超线性收敛).

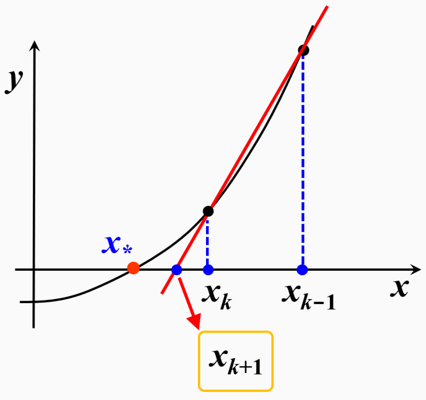
割线法 (Secant Method) 也称 **弦截法**, 主要思想是 **用差商代替微商**, 即

$$f'(x_k) \approx f[x_{k-1}, x_k] = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$$

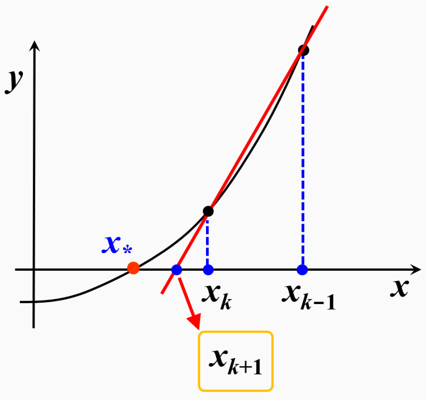
代入 Newton 法即可得 **割线法** 迭代格式:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})} f(x_k), \quad k = 1, 2, \ldots.$$

✍ 割线法需要提供两个迭代初始值.



y
x_*
x_k
x_{k-1}
x
x_{k+1}



定理 设 x_* 是 $f(x)$ 的零点, $f(x)$ 在 x_* 的某邻域 $U(x_*,\delta)$ 内二阶连续可导, 且 $f'(x)\neq 0$. 若初值 $x_0, x_1 \in U(x_*,\delta)$, 则当 δ 充分小时, 割线法具有 p 阶收敛性, 其中

$$p=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\approx 1.618,$$

即 p 是 $p^2-p-1=0$ 的一个根.

6-2-2 抛物线法

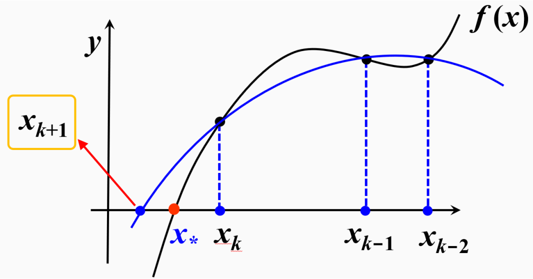
抛物线法 的主要思想: 用抛物线来近似 $f(x)$.

具体做法: 假定已知三个相邻的迭代值 x_{k-2}, x_{k-1}, x_k, 构造过点 $(x_{k-2}, f(x_{k-2}))$, $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$, $(x_k, f(x_k))$ 的二次曲线 $p_2(x)$, 然后用 $p_2(x)$ 的零点作为下一步的迭代值 x_{k+1}.

6-2-2 抛物线法

抛物线法 的主要思想: 用抛物线来近似 $f(x)$.

具体做法: 假定已知三个相邻的迭代值 x_{k-2}, x_{k-1}, x_k, 构造过点 $(x_{k-2}, f(x_{k-2}))$, $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$, $(x_k, f(x_k))$ 的二次曲线 $p_2(x)$, 然后用 $p_2(x)$ 的零点作为下一步的迭代值 x_{k+1}.



几点说明

(1) 二次曲线 $p_2(x)$ 可通过 Newton 插值公式得到

$$p_2(x) = f(x_k) + f[x_k, x_{k-1}](x - x_k) + f[x_k, x_{k-1}, x_{k-2}](x - x_k)(x - x_{k-1}).$$

(2) 零点的选取: 此时 $p_2(x)$ 有两个零点, 取靠近 x_k 的那个零点作为 x_{k+1} .

(3) 在一定条件下可以证明: 抛物线法的局部收敛阶为

$$p \approx 1.840. \qquad (p^3 - p^2 - p - 1 = 0)$$

几点注记

(1) 与割线法相比, 抛物线法具有更高的收敛阶.

(2) 抛物线法可能涉及复数运算, 有时可以用来求复根.

(3) 抛物线法需提供三个初始值.

(4) 抛物线法也称为 **Muller 法**.