第四讲 线性方程组迭代方法

4.3 三种经典迭代法的收敛性分析

基本准则

- Jacobi 迭代收敛的 **充要** 条件: $\rho(J) < 1$

  G-S 迭代收敛的 **充要** 条件: $\rho(G) < 1$

  SOR 迭代收敛的 **充要** 条件: $\rho(S_\omega) < 1$

- Jacobi 迭代收敛的 **充分** 条件: $\|J\| < 1$

  G-S 迭代收敛的充分条件 **充分** 条件: $\|G\| < 1$

  SOR 迭代收敛的充分条件 **充分** 条件: $\|S_\omega\| < 1$

4-3-1 不可约与对角占优

定义 (不可约) 设 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, 若存在置换矩阵 P, 使得 $PAP^\intercal$ 为块上三角矩阵, 即

$$PAP^\intercal = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix},$$

其中 $A_{11} \in \mathbb{R}^{k\times k}$ $(1 \le k < n)$, 则称 A 为**可约矩阵**, 否则称为 **不可约矩阵**.

引理 设 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 是三对角矩阵, 且三条对角线上的元素都非零, 则 A 不可约.

(证明可参见相关资料)

对角占优矩阵

定义 (对角占优) 设 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, 若

$$|a_{ii}| \geq \sum_{j\neq i} |a_{ij}|$$

对所有 $i = 1, 2, \ldots, n$ 都成立, 且至少有一个不等式严格成立, 则称 A 为**弱行对角占优**, 简称**对角占优**. 若对所有 $i = 1, 2, \ldots, n$ 不等式都严格成立, 则称 A 是**严格行对角占优**, 简称**严格对角占优**.

✍ 类似地, 可以定义**弱列对角占优** 和 **严格列对角占优**.

不可约与对角占优矩阵基本性质

定理 若 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 是严格对角占优矩阵, 则 A 非奇异.

(板书)

定理 设 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 是不可约的弱对角占优矩阵, 则 A 非奇异.

(证明可参见相关资料)

4-3-2 Jacobi 和 G-S 的收敛性

对角占优情形

定理 设 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, 若 A 严格对角占优, 则 Jacobi 和 G-S 迭代法都收敛.

(板书)

4-3-2 Jacobi 和 G-S 的收敛性

对角占优情形

定理 设 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, 若 A 严格对角占优, 则 Jacobi 和 G-S 迭代法都收敛.

(板书)

定理 若 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 不可约弱对角占优, 则 Jacobi 方法和 G-S 迭代法都收敛.

(证明可参见相关资料)

对称正定情形

定理 设 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 对称且 D 正定, 则 Jacobi 收敛的充要条件是 $2D - A$ 正定.

(证明可参见相关资料)

定理 设 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 对称且 D 正定, 则 G-S 收敛的充要条件是 A 正定.

(证明可参见相关资料)

4-3-3 SOR 的收敛性

SOR 收敛的必要条件

定理 若 SOR 迭代方法收敛, 则 $0 < \omega < 2$.

(板书)

对角占优情形：充分条件

定理 设 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, 若 A 严格对角占优 (或不可约弱对角占优) 且 $0 < \omega \le 1$, 则 SOR 收敛.

(证明可参见相关资料)

对称正定情形：充要条件

定理 设 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 对称正定, 则 SOR 迭代方法收敛的充要条件是 $0 < \omega < 2$.

(证明可参见相关资料)

例 考虑线性方程组 $Ax = b$, 其中 $A = \begin{bmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{bmatrix}$. 试给出 Jacobi, G-S 和 SOR 收敛的充要条件. (板书)