

华东师范大学期末试卷 (A): 2024—2025 学年第 2 学期

课程名称: 高等代数 II

教师姓名: 陆俊

学生姓名: _____

学号: _____

专业: _____

年级/班级: 2024 级非师范班

课程性质: 专业必修

一	二	三	四	五	六	七	八	总分	阅卷人签名

以下如无特别声明, 所有矩阵 (线性空间、多项式) 均是复数域 $\mathbb{C}$ 上的矩阵 (线性空间、多项式); $M_{m \times n}(\mathbb{C})$ 表 m 行 n 列复矩阵全体, $M_n(\mathbb{C})$ 表 n 阶复方阵全体; χ_A 表方阵 A 的特征多项式; $m_A(\lambda)$ 表 A 的极小多项式; $\text{tr}(A)$ 表示 A 的迹; $\bar{A}$ 表示 A 的复共轭矩阵; A^T 表示 A 的转置; $J_n(\lambda_0)$ 表示属于特征值 λ_0 的 n 阶若当块.

一、(共 10 分) 求满足以下方程的所有方阵 $X \in M_3(\mathbb{C})$,

$$\begin{pmatrix} J_2(1) & \\ & -1 \end{pmatrix} X = X J_3(-1)$$

二、(共 10 分) 求所有满足

$$X^3 + I_3 = X^2 + X$$

且不可对角化的 $X \in M_3(\mathbb{C})$.

三、(共 10 分) 设 $A = J_2(a) + J_2(a)^T$ (这里 a 是给定实数), 求实正交矩阵 T 以及对角阵 D , 使得 $T^{-1}AT = D$.

四、(共 10 分) 设二次型

$$q(x, y, z) = 2x^2 + 4y^2 + z^2 + 2\lambda xz + 2xy.$$

(1) 问: λ 取何值时, q 是正定的?

(2) 当 $\lambda = 1$ 时, 请将 q 化为实标准型.

五、(共 20 分)

$$A = \begin{pmatrix} -6 & -7 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

- (1) 求可逆矩阵 $P \in M_2(\mathbb{C})$ 及若当典范形 J , 使得 $P^{-1}AP = J$;
- (2) 求 e^{I_2-A} 与 A^{-2} (要求写出具体的矩阵).

六、(共 20 分) 考虑线性映射 $\varphi: \mathbb{C}^3 \mapsto \mathbb{C}^3$,

$$\varphi(x, y, z) = (-4y + 5z, -x - y + 3z, -x + 2z).$$

- (1) 求 φ 的初等因子组和不变因子组;
- (2) 对 φ 的每个特征值 λ , 设 $W_\lambda(\varphi)$ 是属于 λ 的根子空间, 求 $W_\lambda(\varphi)$ 的基与维数.

七、(共 10 分) 设 $A = J_n(\lambda_0)$ ($n > 1$). 证明: $A^2 \sim A$ 当且仅当特征值 $\lambda_0 = 1$.

八、(共 10 分) 设 $e_1, \dots, e_n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的标准基, f 是 $\mathbb{R}^n$ 上的负定实对称双线性型 (即相伴的二次型是负定的), 满足

$$f(e_i, e_j) \geq 0, \quad 1 \leq i < j \leq n.$$

- (1) 证明: 存在非零向量 $\alpha = \sum_{i=1}^n a_i e_i$ 满足

$$f(\alpha, e_i) \leq 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

- (2) 证明: 满足上述条件的向量 α 之诸系数 a_i 必为非负实数.