

华东师范大学期中试卷: 2024—2025 学年第 2 学期

课程名称: 高等代数 II 教师姓名: 陆俊
 学生姓名: _____ 学 号: _____
 专 业: _____ 年级/班级: 2024 级非师范班
 课程性质: 专 业 必 修

一	二	三	四	五	六	七	总分	阅卷人签名

以下如无特别声明, K 均表数域, $\mathbb{Q}$ ($\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$) 表有理数 (实数、复数) 域, f, g 表 $K[x]$ 中的多项式; $M_{m \times n}(K)$ 表 m 行 n 列矩阵全体, $M_n(K)$ 表 n 阶方阵全体; χ_A 表方阵 A 的特征多项式; $m_A(\lambda)$ 表 A 的极小多项式; V 是 K 上的线性空间.

一、(共 10 分) 设 $W_1 = L(\alpha_1, \alpha_2)$ 和 $W_2 = L(\beta_1, \beta_2)$ 是 $V = K^4$ 中的线性子空间, 这里

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= (0, 1, 0, -1), & \alpha_2 &= (1, 3, 1, -1), \\ \beta_1 &= (2, -1, 0, 1), & \beta_2 &= (-5, 2, 3, 4). \end{aligned}$$

分别求 $W_1 + W_2$, $W_1 \cap W_2$ 的维数与基.

二、(共 20 分) 设 $W = L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 是标准欧氏空间的子空间,

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= (1, 1, 0, 1), & \alpha_2 &= (2, -1, 1, 2), \\ \alpha_3 &= (1, -1, 2, 2), & \beta &= (1, -2, 0, 9). \end{aligned}$$

- (1) 求 W 的标准正交基;
- (2) 求正交补空间 $W^\perp$ 的基;
- (3) 求 β 在 W 中的正交投影 $P_W(\beta)$.

三、(共 20 分) 给定 $\mathbb{R}^3$ 上的两组基:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= (0, 1, 1), & \xi_2 &= (1, 0, 1), & \xi_3 &= (1, 1, 0), \\ \eta_1 &= (1, -1, 2), & \eta_2 &= (2, -1, 1), & \eta_3 &= (-2, 1, 1). \end{aligned}$$

设 $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ 是线性变换, 满足 $\varphi(\xi_i) = \eta_i$.

- (1) 求由基 ξ_1, ξ_2, ξ_3 到基 η_1, η_2, η_3 的过渡矩阵;
- (2) 分别求 φ 在基 ξ_1, ξ_2, ξ_3 和基 η_1, η_2, η_3 下的表示矩阵;
- (3) 设 $\alpha = (1, 0, 0)$, 分别求 $\varphi(\alpha)$ 在基 ξ_1, ξ_2, ξ_3 和 η_1, η_2, η_3 下的坐标.

四、(共 20 分) 考虑 $M_4(K)$ 中的矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 12 & 4 \\ -2 & -7 & -2 \\ 4 & 12 & 3 \end{pmatrix}.$$

- (1) 求 A 的特征多项式 $\chi_A(\lambda)$ 和极小多项式 $m_A(\lambda)$;
- (2) 求 A 的特征值以及对应的特征子空间的基;
- (3) 求可逆矩阵 $P \in M_3(K)$ 使得 $D := P^{-1}AP$ 是对角阵, 并写出 D .

五、(共 10 分) 考虑线性映射

$$\varphi: K^3 \rightarrow K^3, \quad (x, y, z) \mapsto (0, x, y).$$

求 φ 的所有不变子空间.

六、(共 10 分) 设 $A \in M_n(K)$ 满足 $A^3 = A^2$ 且不可对角化. 设

$$W_1 = \{X \in K^n \mid A^2X = 0\}, \quad W_2 = \{X \in K^n \mid AX = X\}.$$

- (1) 证明: $K^n = W_1 \oplus W_2$.
- (2) 证明: A^2 可对角化且 $\text{rk}(A^2) < \text{rk}(A)$.

七、(共 10 分) 已知 $V = M_n(K)$ 是线性空间, 设 $\varphi \in V^*$ 满足

$$\varphi(AB) = \varphi(BA), \quad \forall A, B \in V.$$

- (1) 证明: $E_{ij} \in \text{Ker} \varphi$ ($i \neq j$), 这里 E_{ij} 是第 i 行第 j 列元素为 1, 其余元素均为 0 的方阵.
- (2) 证明: 存在 $\lambda \in K$, 使得 $\varphi = \lambda \cdot \text{tr}$, 这里 $\text{tr}(X)$ 表方阵 X 的迹.

可选附加题 (共 10 分) 考虑 n 阶方阵

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ 1 & 0 & 1 & & \\ & 1 & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & \ddots & 0 & 1 \\ & & & & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

证明: A 的所有特征值恰为 $\lambda_k = 2 \cos \frac{k\pi}{n+1}$ ($k = 1, 2, \dots, n$).