

华东师范大学期中试卷: 2024—2025 学年第 1 学期

课程名称: 高等代数

教师姓名: 陆俊

学生姓名: _____

学 号: _____

专 业: _____

年级/班级: 2024 级非师范班

课程性质: 专业必修

一	二	三	四	五	六	七	总分	阅卷人签名

以下如无特别声明, K 均表数域, $\mathbb{Q}$ ($\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$) 表有理数 (实数、复数) 域, f, g 表 $K[x]$ 中的多项式.

一、 (共 10 分) 考虑置换

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 9 & 1 & 8 & 3 & 4 & 7 & 6 & 5 & 2 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 7 & 1 & 8 & 6 & 4 & 9 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

求乘积 $\tau\sigma\tau^{-1}\sigma^{-1}$.

二、 (共 10 分) 考虑 n 元对称多项式

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (x_i + x_j)x_i x_j.$$

将 f 写为初等对称多项式 $e_1, e_2, \dots, e_n$ 的表达式 ($n \geq 3$).

三、 (共 20 分) 求次数最小的多项式 $f(x) \in K[x]$, 满足如下同余方程组

$$\begin{cases} f(x) \equiv 2x - 2 & (\text{mod } x + 1), \\ f(x) \equiv x + 1 & (\text{mod } x^2 + 1), \\ f(x) \equiv 2x + 1 & (\text{mod } x^3). \end{cases}$$

四、 (共 20 分) 设

$$\begin{aligned} f(x) &= x^4 + 4x^3 + 11x^2 + 16x + 8, \\ g(x) &= x^3 + 6x^2 + 11x + 6. \end{aligned}$$

(1) 利用辗转相除法求 $f(x), g(x)$ 的最大公因式 (f, g) (需写出辗转相除法过程);

(2) 求次数最小的 $u, v \in \mathbb{Q}[x]$, 满足 $uf + vg = (f, g)$.

五、(共 20 分) 设

$$f(x) = x^6 + 5x^5 + 5x^4 - 9x^3 - 14x^2 + 4x + 8$$

(1) 求 $f(x)$ 的所有有理根, 并指出它们的重数;

(2) 求 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处的 Taylor 展开式.

六、(共 10 分) 设 n 是正整数, $f_n(x) := x^n + n$.

(1) 分别写出 $f_4(x)$ 在 $\mathbb{Q}[x]$ 和 $\mathbb{C}[x]$ 中的标准分解式.

(2) 证明: $f_{2024}(x)$ 在 $\mathbb{Q}[x]$ 中不可约.

七、(共 10 分) 设 $f(x), g(x), h(x) \in K[x]$ 满足 $h(x) = f(g(x))$, 证明:

$$h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

(该公式称为复合函数求导的链式法则.)

可选附加题 (共 10 分) 设 $f(x) \in K[x]$ 的次数小于 n , 证明:

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k f(k) \binom{n}{k} = 0.$$

(提示: 拉格朗日插值定理)