

华东师范大学期末试卷 (B): 2023—2024 学年第 2 学期

课程名称: 高等代数 II

教师姓名: 陆俊

学生姓名: _____

学号: _____

专业: _____

年级/班级: 2023 级非师范班

课程性质: 专业必修

一	二	三	四	五	六	七	八	总分	阅卷人签名

以下如无特别声明, 所有矩阵 (线性空间、多项式) 均是复数域 $\mathbb{C}$ 上的矩阵 (线性空间、多项式); $M_{m \times n}(\mathbb{C})$ 表 m 行 n 列复矩阵全体, $M_n(\mathbb{C})$ 表 n 阶复方阵全体; χ_A 表方阵 A 的特征多项式; $m_A(\lambda)$ 表 A 的极小多项式; $\text{tr}(A)$ 表示 A 的迹; $\bar{A}$ 表示 A 的复共轭矩阵; A^T 表示 A 的转置; $J_n(\lambda_0)$ 表示属于特征值 λ_0 的 n 阶若当块; $\mathbb{R}^n$ 是 n 维标准欧氏空间.

一、(共 10 分) 求满足以下方程的所有方阵 $X \in M_4(\mathbb{C})$

$$\begin{pmatrix} J_2(0)^T & \\ & J_2(0)^T \end{pmatrix} X = X J_4(0)^T$$

二、(共 10 分) 设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

求实正交矩阵 T 以及对角阵 D , 使得 $T^{-1}AT = D$.

三、(共 20 分)

$$A = \begin{pmatrix} -7 & 4 \\ -9 & 5 \end{pmatrix}$$

(1) 求可逆矩阵 $P \in M_2(\mathbb{C})$ 及若当典范形 J , 使得 $P^{-1}AP = J$;

(2) 求 A^{10} 与 $\sin \pi A$ (要求写出具体的矩阵).

四、(共 20 分) 考虑线性映射 $\varphi: \mathbb{C}^4 \mapsto \mathbb{C}^4$, 它在标准基下的表示矩阵为

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 23 & -16 & 6 & -8 \\ 36 & -25 & 10 & -14 \\ 0 & 0 & -3 & 8 \\ 0 & 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

- (1) 求 φ 的初等因子组和极小多项式 m_φ (注: 即其表示矩阵的初等因子组和极小多项式);
- (2) 对 φ 的每个特征值 λ , 设 $W_\lambda(\varphi)$ 是属于 λ 的根子空间, 求 $W_\lambda(\varphi)$ 的基与维数.

五、(共 10 分) 考虑 λ -矩阵

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} 1-2\lambda & 2\lambda-1 & -\lambda \\ 2\lambda & \lambda^2 & \lambda \\ 2\lambda^2+1 & \lambda^2+\lambda-1 & \lambda^2 \end{pmatrix}$$

求 $A(\lambda)$ 的史密斯正规形以及行列式因子组.

六、(共 10 分) 设 $A = \cos J_n(0)$ 以及 $n_k = \text{rank}(I_n - A)^k$ ($k = 1, 2, \dots$). 求每个 n_k 以及 A 的若当典范形.

七、(共 10 分) 给定非零向量 $\gamma_0 \in \mathbb{R}^3$, 定义列向量空间 $\mathbb{R}^3$ 上的二元函数

$$f_{\gamma_0}(\alpha, \beta) := |(\alpha \ \beta \ \gamma_0)|, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}^3.$$

证明: f_{γ_0} 是 $\mathbb{R}^3$ 反对称双线性函数, 并且它的度量矩阵正交相似于

$$\begin{pmatrix} 0 & |\gamma_0| & 0 \\ -|\gamma_0| & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

这里 $|\gamma_0|$ 是 γ_0 在标准内积下的长度.

八、(共 10 分) 设 $A \in M_n(\mathbb{C})$. 对任何 $\lambda \in \mathbb{C}$, 我们定义 $\rho(\lambda) = \text{rank}(\lambda I_n - A)$. 证明:

$$n = \sum_{\lambda \in \mathbb{C}} (n - \rho(\lambda)).$$