

华东师范大学期末试卷 (A): 2023—2024 学年第 2 学期

课程名称: 高等代数 II

教师姓名: 陆俊

学生姓名: _____

学 号: _____

专 业: _____

年级/班级: 2023 级非师范班

课程性质: 专业必修

一	二	三	四	五	六	七	八	总分	阅卷人签名

以下如无特别声明, 所有矩阵 (线性空间、多项式) 均是复数域 $\mathbb{C}$ 上的矩阵 (线性空间、多项式); $M_{m \times n}(\mathbb{C})$ 表 m 行 n 列复矩阵全体, $M_n(\mathbb{C})$ 表 n 阶复方阵全体; χ_A 表方阵 A 的特征多项式; $m_A(\lambda)$ 表 A 的极小多项式; $\text{tr}(A)$ 表示 A 的迹; $\overline{A}$ 表示 A 的复共轭矩阵; A^T 表示 A 的转置; $J_n(\lambda_0)$ 表示属于特征值 λ_0 的 n 阶若当块.

一、 (共 10 分) 求满足以下方程的所有方阵 $X \in M_4(\mathbb{C})$

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 1 \\ & & & & -1 \end{pmatrix} X = X \begin{pmatrix} 1 & 1 & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}.$$

二、 (共 10 分) 设

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -2 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

求实正交矩阵 T 以及对角阵 D , 使得 $T^{-1}AT = D$.

三、 (共 20 分)

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}$$

(1) 求可逆矩阵 $P \in M_2(\mathbb{C})$ 及若当典范形 J , 使得 $P^{-1}AP = J$;

(2) 求 e^A 与 $\cos \pi A$ (要求写出具体的矩阵).

四、(共 20 分) 考虑线性映射 $\varphi: \mathbb{C}^4 \mapsto \mathbb{C}^4$,

$$\varphi(x, y, z, w) = (x + y + z + w, y + w, x + y + z + w, y + w).$$

- (1) 求 φ 的初等因子组和极小多项式 m_φ (注: 即其表示矩阵的初等因子组和极小多项式);
- (2) 对 φ 的每个特征值 λ , 设 $W_\lambda(\varphi)$ 是属于 λ 的根子空间, 求 $W_\lambda(\varphi)$ 的基与维数.

五、(共 10 分) 考虑 λ -矩阵

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ \lambda + 1 & \lambda^2 + 1 & \lambda^3 + 1 \\ \lambda^2 + 1 & \lambda^4 + 1 & \lambda^6 + 1 \end{pmatrix}$$

求 $A(\lambda)$ 的史密斯正规形以及行列式因子组.

六、(共 10 分) 设 $A = e^{J_n(0)}$ 以及 $n_k = \text{rank}(I_n - A)^k$ ($k = 1, 2, \dots$). 求每个 n_k 以及 A 的若当典范形.

七、(共 10 分) 将 $V = M_n(\mathbb{C})$ 视作复线性空间, 考虑 V 上的二元函数

$$h(A, B) := \text{tr}(\overline{A} \cdot B^T), \quad A, B \in V.$$

证明: h 是 V 上的正定埃尔米特函数.

(注: 矩阵 $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ 的复共轭矩阵为 $\overline{A} := (\bar{a}_{i, j})_{1 \leq i, j \leq n}$.)

八、(共 10 分) 设 $A = J_n(\lambda_0)$ ($n > 1$). 证明: 方程 $X^2 = A$ 有解 $X (\in M_n(\mathbb{C}))$ 当且仅当 $\lambda_0 \neq 0$; 请在 $A = J_2(1)$ 时, 求出所有解.