

华东师范大学期中试卷: 2023—2024 学年第 2 学期

课程名称: 高等代数 II 教师姓名: 陆俊
 学生姓名: _____ 学 号: _____
 专 业: _____ 年级/班级: 2023 级非师范班
 课程性质: 专 业 必 修

一	二	三	四	五	六	七	总分	阅卷人签名

以下如无特别声明, K 均表数域, $\mathbb{Q}$ ($\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$) 表有理数 (实数、复数) 域, f, g 表 $K[x]$ 中的多项式; $M_{m \times n}(K)$ 表 m 行 n 列矩阵全体, $M_n(K)$ 表 n 阶方阵全体; χ_A 表方阵 A 的特征多项式; $m_A(\lambda)$ 表 A 的极小多项式; V 是 K 上的线性空间.

一、 (共 10 分) 设 $W_1 = L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $W_2 = L(\beta_1, \beta_2)$, 这里

$$\alpha_1 = (3, 0, 3, 1), \quad \alpha_2 = (4, 0, -1, 3), \quad \alpha_3 = (2, 0, 1, 1), \\ \beta_1 = (3, 3, 1, -2), \quad \beta_2 = (4, 6, 1, -5).$$

分别求 $W_1 + W_2$ 和 $W_1 \cap W_2$ 的基与维数.

二、 (共 20 分) 设 $W = L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 是标准欧氏空间的子空间,

$$\alpha_1 = (2, 2, -3, 1), \quad \alpha_2 = (0, 1, 2, -2), \quad \alpha_3 = (1, 0, 1, 1).$$

- (1) 求 W 的标准正交基;
- (2) 求正交补空间 $W^\perp$ 的基;
- (3) 设 $\gamma = (1, 1, 1, 1)$, 求 γ 在 W 中的正交投影 $P_W(\gamma)$.

三、 (共 15 分) 考虑实二次型 (λ 是给定实数)

$$q(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_3x_4 + 2x_1^2 + 2x_2^2 + \lambda x_3^2 + \lambda x_4^2.$$

- (1) 当 $\lambda = 0$ 时, 求非奇异线性变换, 使 q 化为标准型, 并指出正、负惯性指数和符号差 (需写出具体的标准型);

(2) 求 λ 的取值范围, 使得 q 正定.

四、(共 25 分) 考虑 $M_4(K)$ 中的矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 & 2 \\ 4 & -3 & 0 & 4 \\ 3 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (1) 求 A 的特征多项式 $\chi_A(\lambda)$ 和极小多项式 $m_A(\lambda)$;
- (2) 求 A 的特征值以及对应的特征子空间的基;
- (3) 判断 A 是否在 K 中可对角化, 请说明理由;
- (4) 求 A^{2024} .

五、(共 10 分) 考虑线性映射

$$\varphi: K^3 \rightarrow K^3, \quad (x, y, z) \mapsto (3x - 2z, 2x - y - z, 2x - 2z).$$

求 φ 的所有不变子空间.

六、(共 10 分) 设 $A \in M_n(K)$, 极小多项式 $m_A(\lambda) = f(\lambda)g(\lambda)$, 这里 $f, g \in K[\lambda]$ 是互素的多项式. 设

$$W_f = \{X \in K^n \mid f(A)X = 0\}, \quad W_g = \{X \in K^n \mid g(A)X = 0\}.$$

证明: $K^n = W_f \oplus W_g$.

七、(共 10 分) 设 $f: V \times V \rightarrow K$ 是 V 上的双线性函数, 满足 $f(\alpha, \alpha) \neq 0, \forall \alpha \in V \setminus \{0\}$.

设 $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in V, G = (f(\alpha_i, \alpha_j))_{1 \leq i, j \leq r} \in M_r(K)$. 证明: G 可逆当且仅当 $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ 线性无关.

可选附加题 (共 10 分) 在第七大题的记号与条件下, 对 V 的任一线性子空间 W , 可定义如下线性子空间

$$W^\perp := \{\alpha \in V \mid f(\alpha, \beta) = 0, \forall \beta \in W\}.$$

问: $V = W \oplus W^\perp$ 是否成立? 如是, 请给证明; 如否, 请举反例.