

# 华东师范大学期末试卷 (B): 2023—2024 学年第 1 学期

课程名称: 高等代数

教师姓名: 陆俊

学生姓名: \_\_\_\_\_

学号: \_\_\_\_\_

专业: \_\_\_\_\_

年级/班级: 2023 级非师范班

课程性质: 专业必修

| 一 | 二 | 三 | 四 | 五 | 六 | 七 | 八 | 总分 | 阅卷人签名 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|----|-------|
|   |   |   |   |   |   |   |   |    |       |

以下如无特别声明,  $K$  均表数域,  $M_{m \times n}(K)$  表示  $m$  行  $n$  列矩阵全体,  $M_n(K)$  表示  $n$  阶方阵全体,  $I_n$  表示  $n$  阶单位矩阵,  $E_{ij}$  是第  $i$  行第  $j$  列为 1 且其余元素为 0 的矩阵,  $r(A)$  和  $tr(A)$  分别表示矩阵  $A$  的秩和迹,  $A^T$  表示  $A$  的转置,  $V, V'$  表示  $K$  上线性空间.

一、(共 20 分) 设线性映射  $\varphi: K^4 \rightarrow K^4$  满足

$$\varphi(x, y, z, w) = (x - 2y + z, y - 2z + w, x + z - 2w, -2x + y + w).$$

(1) 求核空间  $\text{Ker}\varphi$  的维数与基;

(2) 求像空间  $\text{Im}\varphi$  的维数与基.

二、(共 20 分) 设

$$A = \begin{pmatrix} x & a & a & \cdots & a & a \\ a & x & a & \cdots & a & a \\ a & a & x & \cdots & a & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a & a & a & \cdots & x & a \\ a & a & a & \cdots & a & x \end{pmatrix} \in M_n(K).$$

(1) 求行列式  $|A|$ ;

(2) 当  $n = 3, x = 0, a = 1$  时, 分别用两种方法求  $A$  的逆矩阵.

三、(共 10 分) 设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -4 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -4 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

求齐次方程组  $AX = 0$  的基础解系.

四、(共 10 分) 考虑  $S_9$  中的置换

$$\sigma = (123)(456)(789), \quad \tau = (12)(345)(67)(89), \quad \rho = \tau\sigma\tau^{-1}.$$

求逆序数  $N(\rho)$  和符号  $\text{sgn}(\rho)$ .

五、(共 10 分) 求以下列向量组的秩以及极大线性无关组, 并将剩余的向量用它们线性表示出来.

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= (1, 0, 1, -2)^T, & \alpha_2 &= (2, -1, 0, -1)^T, \\ \alpha_3 &= (-1, 1, 1, -1)^T, & \alpha_4 &= (3, -2, -1, 0)^T. \end{aligned}$$

六、(共 10 分) 已知

$$K[x]_n = \{f(x) \in K[x] \mid \deg f \leq n\}$$

是  $K$  上的线性空间, 并有一组基  $1, x, \dots, x^n$ . 证明:

$$\varphi: K[x]_n \longrightarrow K[x]_n, \quad f(x) \mapsto (x-1)f'(x) + f(x)$$

是线性同构, 并求它在上述基下的表示矩阵 (这里  $g'$  表示多项式  $g$  的形式导数).

七、(共 10 分) 设  $K = \mathbb{C}$  是复数域,  $A \in M_n(K)$  满足  $AA^T = 0$  以及  $|A + A^T| \neq 0$ , 证明:  $n$  是偶数且  $r(A) = \frac{n}{2}$ .

八、(共 10 分) 设  $A \in M_n(K)$  满足  $A^3 + A^2 + A = 0$ , 证明:  $B = A + I_n$  可逆, 并求  $B^{-1}$  (将它写为  $A$  的多项式).