

华东师范大学期末试卷 (A): 2023—2024 学年第 1 学期

课程名称: 高等代数 教师姓名: 陆俊
 学生姓名: _____ 学 号: _____
 专 业: _____ 年级/班级: 2023 级非师范班
 课程性质: 专业必修

一	二	三	四	五	六	七	八	总分	阅卷人签名

以下如无特别声明, K 均表数域, $M_{m \times n}(K)$ 表示 m 行 n 列矩阵全体, $M_n(K)$ 表示 n 阶方阵全体, I_n 表示 n 阶单位矩阵, E_{ij} 是第 i 行第 j 列为 1 且其余元素为 0 的矩阵, $r(A)$ 和 $tr(A)$ 分别表示矩阵 A 的秩和迹, A^T 表示 A 的转置, V, V' 表示 K 上线性空间.

一、(共 20 分) 设

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 1 \\ 4 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- (1) 用Cramer 法则求方程组 $AX = B$ 的唯一解 (需写出简要过程);
- (2) 用初等行变换法求逆矩阵 A^{-1} (需写出简要过程)。

二、(共 20 分) 设线性映射 $\varphi: K^4 \longrightarrow K^4$ 满足

$$\varphi(x, y, z, w) = (x + z - 2w, y - z + w, x + 3y - 3w, x - 18y + 9z)$$

- (1) 求 φ 在标准基下的表示矩阵;
- (2) 求核空间 $\text{Ker}\varphi$ 的维数与基;
- (3) 求像空间 $\text{Im}\varphi$ 的维数与基.

三、(共 10 分) 求线性方程组的通解 (要求写成列向量形式)

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4, \\ x_1 - 7x_2 + 6x_3 - 5x_4 = 7, \\ x_1 + 4x_2 - x_3 - 2x_4 = -2, \\ x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 1. \end{cases}$$

四、(共 10 分) 求以下 n 阶行列式 ($n \geq 2$)

$$f_n(x) := \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ x-1 & x-1 & x-1 & \cdots & x-1 & x-1 \end{vmatrix}_{n \times n}.$$

(需写成关于 x 的降幂展开式.)

五、(共 10 分) 求以下置换的逆序数 $N(\sigma)$ 和符号 $\text{sgn}(\sigma)$,

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 8 & 6 & 4 & 2 & 9 & 7 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

六、(共 10 分) 设 V 是 K 上的线性空间, U, W 是 V 的线性子空间. 证明: $U \cap W$ 也是 V 的线性子空间.

七、(共 10 分) 设 $A, B \in M_n(K)$ 满足 $AB = 0$, 证明: 分块矩阵

$$D = \begin{pmatrix} A & I_n \\ -I_n & B \end{pmatrix}$$

是可逆矩阵, 并求 D^{-1} .

八、(共 10 分) 设 $\varphi: V \rightarrow V'$ 是线性映射, $e_1, \dots, e_n$ 是 V 的基, 证明: 如果 $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)$ 是 V' 的基, 则 φ 是线性同构.