

华东师范大学期中试卷: 2023—2024 学年第 1 学期

课程名称: 高 等 代 数 教师姓名: 陆俊
 学生姓名: _____ 学 号: _____
 专 业: _____ 年级/班级: 2023 级非师范班
 课程性质: 专 业 必 修

一	二	三	四	五	六	七	总分	阅卷人签名

以下如无特别声明, K 均表数域, $\mathbb{Q}$ ($\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$) 表有理数 (实数、复数) 域, f, g 表 $K[x]$ 中的多项式.

一、(共 10 分) 考虑置换

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 8 & 3 & 1 & 6 & 7 & 5 & 2 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 7 & 1 & 8 & 6 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

求乘积 $\tau^{-1}\sigma^{-1}\tau\sigma$.

二、(共 10 分) 考虑 n 元对称多项式

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (x_i + x_j)^3.$$

将 f 写为初等对称多项式 $e_1, e_2, \dots, e_n$ 的表达式.

三、(共 20 分) 设

$$\begin{aligned} f(x) &= x^5 + x^4 + 2x^3 - x^2 - x - 2, \\ g(x) &= x^4 + x^2 - x - 1. \end{aligned}$$

- (1) 利用辗转相除法求 $f(x), g(x)$ 的最大公因式 (f, g) (需写出辗转相除法过程);

(2) 求次数最小的 $u, v \in \mathbb{Q}[x]$, 满足 $uf + vg = (f, g)$.

四、(共 20 分) 求次数最小的多项式 $f(x) \in K[x]$, 满足如下同余方程组

$$\begin{cases} f(x) \equiv 2x + 4 & (\text{mod } x + 1), \\ f(x) \equiv 2x^2 + 2x & (\text{mod } x^2 + 1), \\ f(x) \equiv 3x^2 + 1 & (\text{mod } x^3). \end{cases}$$

五、(共 20 分) 设

$$f(x) = 8x^6 + 4x^5 - 14x^4 - 9x^3 + 5x^2 + 5x + 1$$

(1) 求 $f(x)$ 的所有有理根, 并指出它们的重数;

(2) 求 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处的 Taylor 展开式.

六、(共 10 分) 证明: $f(x) = x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1$ 是 $\mathbb{Q}[x]$ 中的不可约多项式当且仅当 n 是素数.

七、(共 10 分) 设 $f(x) \in K[x]$ 无重因式, $n \geq 2$ 是给定正整数, 证明: $f(x^n)$ 有重因式当且仅当 $x = 0$ 是 $f(x)$ 的单根.

可选附加题 (共 10 分) 设 $f(x) \in \mathbb{C}[x]$, 用 $n_0(f)$ 表示多项式 $f(x)$ 的不同根的个数. 假设 $g, h \in \mathbb{C}[x]$ 满足 $f + g + h = 0$ 以及 $(g, h) = 1$, 证明:

$$\max\{\deg f, \deg g, \deg h\} \leq n_0(fgh) - 1.$$

(注记: 该结论称为 Mason 定理.)