

华东师范大学期末试卷 (B): 2023—2024 学年第 1 学期

课程名称: 高等代数 教师姓名: 陆俊
 学生姓名: _____ 学 号: _____
 专 业: _____ 年级/班级: 2023 级非师范班
 课程性质: 专业必修

一	二	三	四	五	六	七	八	总分	阅卷人签名

以下如无特别声明, K 均表数域, $M_{m \times n}(K)$ 表示 m 行 n 列矩阵全体, $M_n(K)$ 表示 n 阶方阵全体, I_n 表示 n 阶单位矩阵, E_{ij} 是第 i 行第 j 列为 1 且其余元素为 0 的矩阵, $r(A)$ 和 $tr(A)$ 分别表示矩阵 A 的秩和迹, A^T 表示 A 的转置, $f_A(\lambda)$ 和 $m_A(\lambda)$ 分别表示方阵 A 的特征多项式和极小多项式, $J_n(\lambda_0)$ 表示特征值为 λ_0 的 n 阶 Jordan 块.

一、(共 10 分) 求 $J = J_n(0)^T$ 的 Moore-Penrose 广义逆矩阵 J^+ .

二、(共 10 分) 设

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 19 & -23 \\ -2 & -10 & 13 \\ -1 & -6 & 8 \end{pmatrix}.$$

求一个 $B \in M_4(\mathbb{C})$ 满足 $B^2 = A$ (要求写成具体的矩阵).

三、(共 10 分) 求出所有与

$$A = \begin{pmatrix} J_2(1) & \\ & J_2(2) \end{pmatrix}.$$

乘法可交换的 4 阶复方阵 X .

四、(共 10 分) 已知复方阵 A 的初等因子是

$$\lambda, \lambda, \lambda^2, (\lambda - 1), (\lambda - 1)^2, (\lambda - 2), (\lambda - 3)^2.$$

求它的阶数、不变因子组、极小多项式 $m_A(\lambda)$ 和特征多项式 $f_A(\lambda)$.

五、(共 10 分) 考虑二次型

$$q(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sum_{1 \leq i < j \leq 4} (-1)^{i+j} (x_i - x_j)^2 + t \sum_{i=1}^4 x_i^2.$$

- (1) 当 $t = 2$ 时, 求非奇异线性变换, 将 q 化为平方和差形式, 并求它的正惯性指数、符号差和秩;
- (2) 求 t 的范围, 使得 q 半负定.

六、(共 20 分) 考虑实对称阵

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (1) 求正交矩阵 T , 使得 $D := T^{-1}AT$ 是对角阵, 并求 D .
- (2) 利用上面结果, 求 $\sin(\pi A)$ 和 $\cos(\pi A)$.

七、(共 20 分) 设

$$A = \begin{pmatrix} 11 & -6 & -2 \\ 18 & -10 & -3 \\ 18 & -9 & -4 \end{pmatrix}.$$

- (1) 用 $\text{rk}((\lambda I_n - A)^k)$ 序列法, 求 A 的 Jordan 典范形 J ;
- (2) 求一个可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP = J$.

八、(共 10 分) 设 $J = J_n(0)$ 是属于特征值 0 的 Jordan 块. 求 J^T 与 J^{n-1} 的典范形.