

华东师范大学期末试卷 (A): 2023—2024 学年第 1 学期

课程名称: 高 等 代 数

教师姓名: 陆俊

学生姓名: _____

学 号: _____

专 业: _____

年级/班级: 2023 级非师范班

课程性质: 专 业 必 修

一	二	三	四	五	六	七	八	总分	阅卷人签名

以下如无特别声明, K 均表数域, $M_{m \times n}(K)$ 表示 m 行 n 列矩阵全体, $M_n(K)$ 表示 n 阶方阵全体, I_n 表示 n 阶单位矩阵, E_{ij} 是第 i 行第 j 列为 1 且其余元素为 0 的矩阵, $r(A)$ 和 $tr(A)$ 分别表示矩阵 A 的秩和迹, A^T 表示 A 的转置, $f_A(\lambda)$ 和 $m_A(\lambda)$ 分别表示方阵 A 的特征多项式和极小多项式, $J_n(\lambda_0)$ 表示特征值为 λ_0 的 n 阶 Jordan 块.

一、(共 10 分) 求

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

的 Moore-Penrose 广义逆矩阵 A^+ .

二、(共 10 分) 设

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 5 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

分别求 A^{10} 和 $\cos(\pi A)$ (要求写成具体的矩阵).

三、(共 10 分) 求满足矩阵方程

$$\begin{pmatrix} J_2(0) & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} X = X \begin{pmatrix} J_2(1) & & \\ & J_2(0) & \end{pmatrix}$$

的所有 $X \in M_4(K)$, 并且求其解空间的维数.

四、(共 10 分) 设 $A \in M_4(\mathbb{C})$ 不可对角化且满足 $A^3 = 3A - 2I_4$. 求所有可能的 A .

五、(共 10 分) 考虑二次型

$$q(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_2)(x_2 - x_3) + (x_3 - x_4)(x_4 - x_1).$$

- (1) 求非奇异线性变换, 将 q 化为平方和差形式, 并求它的正惯性指数、负惯性指数和秩;
- (2) 给出实数 t 的取值范围, 使得

$$q(x_1, x_2, x_3, x_4) + t(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)$$

是正定二次型.

六、(共 20 分) 考虑实对称阵

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 2 \\ 4 & -3 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (1) 求 A 的特征多项式 $f_A(\lambda)$ 以及极小多项式 $m_A(\lambda)$;
- (2) 求正交矩阵 T , 使得 $D := T^{-1}AT$ 是对角阵, 并求 D .

七、(共 20 分) 设

$$A = \begin{pmatrix} -5 & -3 & -9 \\ 6 & 4 & 9 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

- (1) 求 A 的不变因子组;
- (2) 求 Jordan 典范形 J ;
- (3) 求一个可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP = J$.

八、(共 10 分) 设 A 是 n 阶实对称矩阵, 定义 $p_A(t)$ 为 $A - tI_n$ 的正惯性指数 ($t \in \mathbb{R}$).

- (1) 证明: 对充分大的正实数 t , $p_A(t) = 0$;
- (2) 设 B 是 n 阶实对称矩阵, 满足 $p_A(t) = p_B(t)$ ($\forall t \in \mathbb{R}$), 问: 是否必有 $A = B$? 如是, 请证明; 如否, 请举反例.