

华东师范大学期中试卷: 2022—2023 学年第 2 学期

课程名称: 高等代数

教师姓名: 陆俊

学生姓名: _____

学号: _____

专业: _____

年级/班级: 2022 级非师范班

课程性质: 专业必修

一	二	三	四	五	六	七	总分	阅卷人签名

以下如无特别声明, K 均表数域, $\mathbb{Q}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ 表有理数(实数、复数)域, f, g 表多项式, $M_n(K)$ 表 n 阶方阵全体, V 表 K 上的线性空间, $\varphi: V \rightarrow V$ 表线性变换, $E_{ij} \in M_n(K)$ 表示基本矩阵, 即第 i 行第 j 列元素为 1, 其余元素为 0 的方阵.

一、 判断题 (共 10 分) 如正确, 请打 $\sqrt{}$; 如错误, 请打 $\times$.

- (1) 特征多项式 $f_A(\lambda) = (\lambda + 1)^2$ 的 2 阶方阵 A 必不可对角化 ();
- (2) 若方阵 A 和矩阵 $(-I_n)$ 相似, 则必有 $AA^T + A = 0$ ();
- (3) 欧氏空间正交变换的表示矩阵必为正交矩阵 ();
- (4) 若线性变换 $\varphi: V \rightarrow V$ 是满射, 则它必为同构 ();
- (5) 若 K^n 的线性子空间 W_1, W_2 满足 $\dim W_1 + \dim W_2 = n$, 则必有 $W_1 \oplus W_2 = K^n$ ().

二、 填空题 (共 15 分) 设 $\mathbb{R}^3$ 是标准欧氏空间,

$$\alpha = (1, 1, -1), \beta = (1, 1, 1), \gamma = (-1, 1, 1), W = L(\beta),$$

$i: W \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ 是包含映射, $P_W: \mathbb{R}^3 \rightarrow W$ 是正交投影.

- (1) 夹角 $\langle \alpha, \beta \rangle$ 的余弦值等于 _____;
- (2) 设向量 $\alpha + \beta$ 在 W 上的正交投影为 $k\beta$, 则 k 等于 _____;
- (3) $\min_{t \in \mathbb{R}} |\gamma - t\beta|$ 等于 _____;
- (4) 复合映射 $iP_W: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ 的特征多项式为 _____;
- (5) 复合映射 $iP_W: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ 的极小多项式为 _____;

三、 单项选择题 (共 15 分)

(1) 已知 $P, Q \in M_n(K)$ 是相似的可逆矩阵, 以下哪一项未必成立?

- (A) $P + P^T \sim Q + Q^T$; (B) $Q^{-1}P^TQ \sim P^{-1}Q^TP$;
(C) $P + P^{-1} \sim Q + Q^{-1}$; (D) $Q^{-1}PQ \sim P^{-1}QP$;

(2) 以下哪种情形中, 矩阵

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Q})$$

在 $\mathbb{Q}$ 上可对角化?

- (A) $(a, b) = (0, 1)$; (B) $(a, b) = (1, 2)$;
(C) $(a, b) = (2, 0)$; (D) 以上答案都不对;

(3) 设 W_1, W_2 是欧氏空间 V 的线性子空间, 以下哪个结论不正确?

- (A) 若 $W_1^\perp \subseteq W_2^\perp$, 则 $W_2 \subseteq W_1$;
(B) 若 $W_2 \subseteq W_1$, 则 $W_1^\perp \subseteq W_2^\perp$;
(C) 若 $W_2 \subseteq W_1^\perp$, 则 $W_1 + W_2 = W_1 \oplus W_2$;
(D) 若 $W_1 + W_2 = W_1 \oplus W_2$, 则 $W_2 \subseteq W_1^\perp$;

(4) 已知 3 阶矩阵 A 有特征值 $1, 0, -1$, 设 $B = A^{100}$, 那么 $\text{tr}(B)$ 和 $|B|$ 分别为

- (A) $0, 0$; (B) $2, 0$; (C) $0, 2$; (D) 不可能确定;

(5) 已知矩阵 $A \in M_n(\mathbb{C})$ 的特征多项式 $f_A(\lambda) = \lambda^n - 1$, 设 $m_A(\lambda)$ 是 A 的极小多项式, 以下哪个结论正确?

- (A) A 必定可对角化, 且 $m_A(\lambda) = f_A(\lambda)$;
(B) A 必定可对角化, 但 $m_A(\lambda) \neq f_A(\lambda)$;
(C) A 未必可对角化, 且 $m_A(\lambda) = f_A(\lambda)$;
(D) A 未必可对角化, 但 $m_A(\lambda) \neq f_A(\lambda)$.

四、 计算题 (共 20 分) 考虑 $V = K^4$ 上的线性变换 $\varphi: V \rightarrow V$, 它在标准基下的表示矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -13 & 5 \\ -1 & -2 & 5 & -2 \\ -3 & -3 & 9 & -3 \\ -5 & -4 & 13 & -4 \end{pmatrix}.$$

(1) 分别求 $\text{Ker}\varphi$ 与 $\text{Im}\varphi$ 的维数与基;

(2) 分别求 $\text{Ker}\varphi \cap \text{Im}\varphi$ 与 $\text{Ker}\varphi + \text{Im}\varphi$ 的维数与基.

五、 计算题 (共 20 分) 设 $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ 在标准基 e_1, e_2, e_3 下的表示阵为

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

- (1) 求 $\mathbb{R}^3$ 的一组基 η_1, η_2, η_3 , 使得 φ 在该基下的表示阵为对角矩阵 D , 并求 D ;
- (2) 求 φ 的所有不变子空间.

六、 证明题 (共 20 分) 设 $A \in M_n(\mathbb{C})$. 考虑列向量空间 $\mathbb{C}^n$ 中的线性子空间

$$W_k = \{X \in \mathbb{C}^n \mid A^k X = 0\} \quad (k = 1, 2), \\ U = \{AX \mid X \in \mathbb{C}^n\}.$$

- (1) 证明: $W_1 \oplus U = \mathbb{C}^n$ 当且仅当 $W_1 = W_2$;
- (2) 证明: 当 $n = 2$ 时, $W_1 \oplus U = \mathbb{C}^2$ 成立当且仅当 A 不相似于基本矩阵 $E_{12} \in M_2(\mathbb{C})$.

七、 可选附加题 (共 10 分) 考虑 n 维标准欧氏空间 V 中的向量

$$\alpha_k = (a_{k1}, \dots, a_{kn})^T, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

设 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ 以及 $G(\alpha_1, \dots, \alpha_r) := ((\alpha_i, \alpha_j))_{1 \leq i, j \leq r}$ 是 r 阶格拉姆阵 ($r \leq n$).

- (1) 证明:

$$|G(\alpha_1, \alpha_2)| = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left| \begin{array}{cc} a_{1i} & a_{2i} \\ a_{1j} & a_{2j} \end{array} \right|^2.$$

- (2) 证明: $|G(\alpha_1, \dots, \alpha_n)| = |A|^2$;
- (3) 对于 $G(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$, 你猜测会有什么关系式? (无需证明).