

华东师范大学期末试卷 (B): 2021—2022 学年第 2 学期

课程名称: 高等代数 II 教师姓名: 陆俊
 学生姓名: _____ 学 号: _____
 专 业: _____ 年级/班级: 2021级非师范
 课程性质: 专业必修

一	二	三	四	五	六	七	总分	阅卷人签名

以下如无特别声明, K 均表数域, $M_n(K)$ 表示 n 阶方阵全体, I_n 表示 n 阶单位矩阵, $r(A)$ 表示矩阵 A 的秩, $tr(A)$ 是 A 的迹, A^T 表示 A 的转置, V 是线性空间, $L(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ 表示由 $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ 生成的线性空间, φ 表示线性变换, Id 表示恒同变换, $J_n(\lambda_0)$ 表示特征值为 λ_0 的 n 阶若当阵, $E_{ij} \in M_n(K)$ 是基本矩阵, 其中除了 (i, j) 位置上系数为 1 外, 其余系数均为 0.

一、(共 10 分) 已知复方阵 A 初等因子组是

$$\lambda, \lambda, \lambda^2, (\lambda - 1), (\lambda - 1)^2, (\lambda + 1), (\lambda + 1).$$

- (1) 求它的阶数、特征多项式和极小多项式;
- (2) 求不变因子组.

二、(共 10 分) 设 $A = J_n(0)$ (即属于特征值 0 的 n 阶若当阵). 求 A 的 Moore-Penrose 广义逆 A^+ .

三、(共 20 分) 设 $t \in \mathbb{R}$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & t-2 & -2 \\ 1 & -2 & t+1 \end{pmatrix}.$$

- (1) 求使得 A 正定的所有实数 t ;
- (2) 当 $t = 0$ 时, 求正交矩阵 P , 使得 $P^T A P$ 是对角阵, 并写出该对角阵;
- (3) 当 $t = 0$ 时, 考虑实函数 $f(X) := \frac{X A X^T}{X X^T}$, 这里 $X = (x_1, x_2, x_3)$ 取任何非零实向量. 试求 $f(X)$ 的最大值和最小值, 并给出达到最值时的 X .

四、(共 20 分) 设 $V = \mathbb{R}^4$ 是标准欧氏空间,

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= (1, 1, 1, -1), & \alpha_2 &= (1, 0, 1, 0), \\ \beta_1 &= (1, 1, 1, 1), & \beta_2 &= (1, 1, 0, 0). \end{aligned}$$

- (1) 求 $W := L(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1)$ 的标准正交基;
- (2) 求 β_2 在 W 上的正交投影 $P_W(\beta_2)$;
- (3) 求 $L(\beta_1, \beta_2)$ 的正交补空间 (要求写出基).

五、(共 20 分) 已知 $V = M_2(\mathbb{C})$ 是线性空间 (基本矩阵 $\{E_{ij}\}_{1 \leq i, j \leq 2}$ 构成一组基), $\varphi: V \rightarrow V$ 是线性映射, 满足 $\varphi(X) = BX - XB$ ($\forall X \in V$), 这里

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (1) 求 φ 的若当典范形;
- (2) 求 φ 的特征值及对应的特征子空间;
- (3) 除了特征子空间外, φ 还有哪些非平凡的不变子空间? (需说明理由).

六、(共 10 分) 设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & -2 \\ 1 & -2 & 9 \end{pmatrix}.$$

求 $\cos \frac{\pi}{4} A$.

七、(共 10 分) 已知 $V = \{a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Q}\}$ 是有理数域 $\mathbb{Q}$ 上的线性空间 ($1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6}$ 是一组基). 给定 $\gamma \in V$, $\varphi_\gamma: V \rightarrow V$ 是线性变换, 满足 $\varphi_\gamma(x) = \gamma x$ ($\forall x \in V$).

- (1) 当 $\gamma = \sqrt{2}$ 时, 求 φ_γ 的极小多项式, 并证明它在 $\mathbb{Q}$ 中不可对角化;
- (2) 问: 是否存在无理数 $\gamma \in V$, 使得 φ_γ 在 $\mathbb{Q}$ 中可对角化? (如有, 请举例; 如无, 请说明理由).