

华东师范大学期末试卷 (A): 2021—2022 学年第 2 学期

课程名称: 高等代数 II

教师姓名: 陆俊

学生姓名: _____

学号: _____

专业: _____

年级/班级: 2021级非师范

课程性质: 专业必修

一	二	三	四	五	六	七	总分	阅卷人签名

以下如无特别声明, K 均表数域, $M_n(K)$ 表示 n 阶方阵全体, I_n 表示 n 阶单位矩阵, $r(A)$ 表示矩阵 A 的秩, $tr(A)$ 是 A 的迹, A^T 表示 A 的转置, V 是线性空间, $L(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ 表示由 $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ 生成的线性空间, φ 表示线性变换, Id 表示恒同变换, $J_n(\lambda_0)$ 表示特征值为 λ_0 的 n 阶若当阵.

一、(共 10 分) 求以下矩阵 A 的 Moore-Penrose 广义逆 A^+ (要求写出简要过程):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R}).$$

二、(共 10 分) 求所有与 A 乘法交换的 4 阶复方阵 X , 这里

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & 1 \\ & & & -1 \end{pmatrix}.$$

三、(共 20 分) 设 A 同第二大题, $\varphi: K^4 \rightarrow K^4$ 是以 A 为表示阵 (在标准基下) 的线性变换.

- (1) 求 A 的特征多项式和极小多项式;
- (2) 求 A^{2022} 和 $\cos \pi A$ (要求具体写出矩阵);
- (3) 求 φ 的所有不变子空间 (请说明理由).

四、(共 20 分) 设

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 2 \\ -4 & -5 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{C}).$$

- (1) 写出 A 的不变因子组;
- (2) 求 A 的若当典范形 J ;
- (3) 求可逆矩阵 $P \in M_3(\mathbb{C})$, 使得 $P^{-1}AP = J$.

五、(共 20 分) 设 $W_1 = L(\alpha_1, \alpha_2)$ 及 $W_2 = L(\beta_1, \beta_2)$ 是标准欧氏空间 $V = \mathbb{R}^4$ 的线性子空间, 这里

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= (1, 3, 1, -1), & \alpha_2 &= (1, 0, 1, 2), \\ \beta_1 &= (3, -1, -3, -5), & \beta_2 &= (5, -2, -3, -4). \end{aligned}$$

- (1) 求 β_1 在 W_1 上的正交投影 $P_{W_1}(\beta_1)$;
- (2) 求 $L(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1)$ 的标准正交基;
- (3) 求 $W_1 + W_2$ 和 $W_1 \cap W_2$ 的基与维数;
- (4) 求 $W_1 + W_2$ 的正交补空间 (要求写出基).

六、(共 10 分) 设 $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$q(x_1, x_2, x_3, x_4) = \lambda(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2) - 4(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4).$$

- (1) 求使得二次型 q 正定的 λ 的取值范围;
- (2) 当 $\lambda = 0$ 时, 求二次型 q 的实标准型 (要求写出坐标变换), 并指出正惯性指数和符号差.

七、(共 10 分) 设 V 是域 K 上的 n 维线性空间, $\varphi: V \rightarrow V$ 是线性变换, 满足 $\varphi^2 = c\varphi$, 这里 $c \in K$ 是某个非零常数.

- (1) 证明: φ 在 K 内可对角化;
- (2) 证明: $V = \text{Ker}\varphi \oplus \text{Im}\varphi$.