

华东师范大学期末试卷 (B): 2022—2023 学年第 1 学期

课程名称: 高等代数

教师姓名: 陆俊

学生姓名: _____

学号: _____

专业: _____

年级/班级: 2022 级非师范班

课程性质: 专业必修

一	二	三	四	五	六	七	八	总分	阅卷人签名

以下如无特别声明, K 均表数域, $M_{m \times n}(K)$ 表示 m 行 n 列矩阵全体, $M_n(K)$ 表示 n 阶方阵全体, I_n 表示 n 阶单位矩阵, E_{ij} 是第 i 行第 j 列为 1 且其余元素为 0 的矩阵, $r(A)$ 表示矩阵 A 的秩, $tr(A)$ 是 A 的迹, A^T 表示 A 的转置.

一、(共 10 分) 求置换 $\sigma = (1357)(2468) \in S_8$ 的逆序数并判断其奇偶性.

二、(共 10 分) 求以下 n 阶行列式的值:

$$D_n = \begin{vmatrix} 3 & 1 & & & & \\ 2 & 3 & 1 & & & \\ & 2 & 3 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 2 & 3 & 1 \\ & & & & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

三、(共 10 分) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 分别是以下矩阵的四个列向量:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 8 & 7 \\ 2 & 5 & 7 & 8 \\ 5 & 9 & 14 & 13 \\ 2 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

- (1) 求 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的极大线性无关组以及秩 $r(A)$;
- (2) 求满足 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 + x_4\alpha_4 = 0$ 的所有可能解(要求写成列向量形式).

四、(共 20 分) 考虑矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

- (1) 求伴随矩阵 A^* 以及行列式 $|A|$;
- (2) 用初等行变换方法求逆矩阵 A^{-1} (需写简要过程)

五、(共 20 分) 考虑映射

$$\varphi: M_2(K) \longrightarrow M_2(K), \quad X \rightarrow \frac{1}{2}(X + X^T).$$

- (1) 证明: φ 是线性映射;
- (2) 求 φ 在 $M_2(K)$ 的基 $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$ 下的表示矩阵;
- (3) 分别求核空间 $\text{Ker}\varphi$ 和像空间 $\text{Im}\varphi$ 的维数与基.

六、(共 10 分) 设 $A, B \in M_n(K)$, 满足 $(A + I_n)B = A + 2I_n$. 证明: $I_n - B$ 是可逆矩阵.

七、(共 10 分) 设 $A \in M_n(K)$ 可逆, $\lambda \in K$. 证明: 分块矩阵

$$\begin{pmatrix} A & I_n \\ \lambda I_n & A^{-1} \end{pmatrix}$$

可逆当且仅当 $\lambda \neq 1$.

八、(共 10 分) 设 $A \in M_{m \times n}(K)$ ($m < n$). 证明: $A^T A$ 一定不可逆.