

华东师范大学期末试卷 (A): 2022—2023 学年第 1 学期

课程名称: 高等代数

教师姓名: 陆俊

学生姓名: _____

学 号: _____

专 业: _____

年级/班级: 2022 级非师范班

课程性质: 专业必修

一	二	三	四	五	六	七	八	总分	阅卷人签名

以下如无特别声明, K 均表数域, $M_{m \times n}(K)$ 表示 m 行 n 列矩阵全体, $M_n(K)$ 表示 n 阶方阵全体, I_n 表示 n 阶单位矩阵, E_{ij} 是第 i 行第 j 列为 1 且其余元素为 0 的矩阵, $r(A)$ 表示矩阵 A 的秩, $tr(A)$ 是 A 的迹, A^T 表示 A 的转置.

一、(共 10 分) 求以下置换的逆序数并判断其奇偶性:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 6 & 2 & 8 & 1 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

二、(共 10 分) 求以下 n 阶行列式的值:

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

三、(共 10 分) 求齐次线性方程组

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 1 & 4 & 7 & 10 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

的基础解系 (要求写成列向量形式) 以及系数矩阵的秩.

四、(共 20 分) 考虑矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

(1) 用克莱默法则求线性方程组 $AX = B$ (需写简要过程).

(2) 用初等行变换方法求逆矩阵 A^{-1} (需写简要过程)

五、(共 20 分) 考虑线性映射

$$\varphi: K^4 \longrightarrow K^4, \quad (x, y, z, w) \rightarrow (x - y, y - z, z - w, w - x).$$

(1) 求 φ 在 K^4 的标准基下的表示矩阵;

(2) 求核空间 $\text{Ker}\varphi$ 的维数与基;

(2) 求像空间 $\text{Im}\varphi$ 的维数与基.

六、(共 10 分) 设 $A \in M_2(K)$, A^* 是 A 的伴随矩阵. 证明: $A = -A^*$ 当且仅当 $\text{tr}(A) = 0$ (这里 $\text{tr}(A)$ 指 A 的迹).

七、(共 10 分) 设 $A \in M_n(K)$ 满足 $A^3 = A$, 证明: $B = A^2 + A - I_n$ 是可逆的.

八、(共 10 分) 设 $\varphi: V \rightarrow V$ 是线性映射, 证明:

$$W = \{\alpha \in V \mid \text{存在 } \beta \in V, \text{ 使得 } \varphi(\alpha + \beta) = \beta\}$$

是 V 的线性子空间且包含核空间 $\text{Ker}\varphi$.