

华东师范大学期中试卷: 2022—2023 学年第 1 学期

课程名称: 高 等 代 数 教师姓名: 陆俊
 学生姓名: _____ 学 号: _____
 专 业: _____ 年级/班级: 2022 级非师范班
 课程性质: 专 业 必 修

一	二	三	四	五	六	七	总分	阅卷人签名

以下如无特别声明, K 均表数域, $\mathbb{Q}$ ($\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$) 表有理数 (实数、复数) 域, f, g 表多项式.

一、 (共 20 分) 设

$$\begin{aligned} f(x) &= 8x^4 - 16x^3 + 14x^2 - 6x + 1, \\ g(x) &= 2x^3 - 5x^2 + 4x - 1. \end{aligned}$$

- (1) 利用辗转相除法求 $f(x), g(x)$ 的最大公因式 (f, g) (需写出辗转相除法过程);
- (2) 求次数最小的 $u, v \in \mathbb{Q}[x]$, 满足 $uf + vg = (f, g)$.
- (3) 求最小公倍式 $[f, g]$ 的所有有理根及对应的重数;
- (4) 求 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处的 Taylor 展开式.

二、 (共 20 分) 求次数最小的多项式 $f(x) \in K[x]$, 满足如下同余方程组

$$\begin{cases} f(x) \equiv 2x & (\text{mod } x+1), \\ f(x) \equiv 3x+1 & (\text{mod } x^2+1), \\ f(x) \equiv 2x+1 & (\text{mod } x^3). \end{cases}$$

三、 (共 20 分) 求以下方程组的全部解 (要求化为简化阶梯方程组), 并求出方程组的秩.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 3, \\ 3x_1 + 5x_2 + 12x_3 + 7x_4 = 17, \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 5, \\ 2x_1 - 3x_2 - 11x_3 - 8x_4 = -14. \end{cases}$$

四、(共 10 分) 考虑 4 元对称多项式

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sum_{1 \leq i < j \leq 4} (x_i^2 - x_j^2)^2.$$

将 f 写为初等对称多项式 e_1, e_2, e_3, e_4 的表达式.

五、(共 10 分) 考虑置换

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 3 & 5 & 6 & 7 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 7 & 1 & 6 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

分别求 $\tau^{-1}\sigma\tau$ 及 σ^2 .

六、(共 10 分) 设 K 是数域. 证明: 如果 $\mathbb{R} \subsetneq K$, 那么必有 $K = \mathbb{C}$.

七、(共 10 分) 设 p 是素数,

$$e(x) := 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^p}{p!}.$$

证明: $e(x)$ 在 $\mathbb{Q}[x]$ 中不可约.

可选附加题 (共 10 分) 给定 $n(\geq 1)$ 次多项式 $f(x) \in \mathbb{C}[x]$. 对任何 $\lambda \in \mathbb{C}$, 我们用 $d(\lambda)$ 表示多项式 $f(x) - \lambda$ 的不同根的个数. 证明: 至多只有有限个复数 λ 满足 $n - d(\lambda) \neq 0$, 且有

$$n - 1 = \sum_{\lambda \in \mathbb{C}} (n - d(\lambda)).$$

(注记: 该等式是著名的 Hurwitz 公式的特殊情形. 代数几何荣誉课中将会详细介绍.)