

# 华东师范大学期末试卷 (B): 2021—2022 学年第 1 学期

课程名称: 高等代数

教师姓名: 陆俊

学生姓名: \_\_\_\_\_

学号: \_\_\_\_\_

专业: \_\_\_\_\_

年级/班级: 2021 级非师范班

课程性质: 专业必修

| 一 | 二 | 三 | 四 | 五 | 六 | 七 | 八 | 总分 | 阅卷人签名 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|----|-------|
|   |   |   |   |   |   |   |   |    |       |

以下如无特别声明,  $K$  均表数域,  $M_{m \times n}(K)$  表示  $m$  行  $n$  列矩阵全体,  $M_n(K)$  表示  $n$  阶方阵全体,  $I_n$  表示  $n$  阶单位矩阵,  $E_{ij}$  是第  $i$  行第  $j$  列为 1 且其余元素为 0 的矩阵,  $r(A)$  表示矩阵  $A$  的秩,  $tr(A)$  是  $A$  的迹,  $A^T$  表示  $A$  的转置.

一、(共 10 分) 求置换  $\sigma = (135)(27)(46)$  的逆序数并判断其奇偶性.

二、(共 10 分) 求以下  $n$  阶行列式的值:

$$D_n = \begin{vmatrix} x & y & y & \cdots & \cdots & y \\ y & x & y & \cdots & \cdots & y \\ y & y & x & y & \cdots & y \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y & y & \cdots & y & x & y \\ y & y & \cdots & \cdots & y & x \end{vmatrix}.$$

三、(共 10 分) 设  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  分别是如下矩阵的列向量:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(1) 求满足  $\sum_{i=1}^4 x_i \alpha_i = 0$  的所有  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$ . (需写成基础解系的形式)

(2) 求向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  的极大线性无关组.

四、(共 20 分) 考虑矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 10 & 8 \\ 2 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

- (1) 求  $A$  的伴随矩阵  $A^*$  及行列式  $|A|$ .
- (2) 用初等行变换方法求逆矩阵  $A^{-1}$  (需写简要过程).
- (3) 用克莱默法则求线性方程组  $AX = B$  (需写简要过程).

五、(共 20 分) 考虑线性空间  $V = M_2(K)$  下的迹映射  $\varphi: V \rightarrow K^1$ , 即  $\varphi(A) = \text{tr}(A)$ .

- (1) 证明:  $\varphi$  是线性映射.
- (2) 求  $\varphi$  在标准基  $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$  下的表示矩阵.
- (3) 求核空间  $\text{Ker}\varphi$  的维数与基.
- (4) 求像空间  $\text{Im}\varphi$  的维数与基.

六、(共 10 分) 设  $A \in M_n(K)$  满足  $A^3 = A$ . 证明:  $I_n + A + A^2$  可逆, 并求它的逆矩阵.

七、(共 10 分) 设  $\alpha_1, \dots, \alpha_r, \beta \in K^n$ , 且  $\beta$  不落在子空间  $L(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$  内, 证明: 如果  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$  线性无关, 那么  $\beta + \alpha_1, \dots, \beta + \alpha_r$  线性无关. 进一步, 请举例说明其逆命题不成立.

八、(共 10 分) 设  $W_1, W_2$  是线性空间  $V$  的线性子空间. 令

$$W_1 + W_2 \triangleq \{w_1 + w_2 \mid w_1 \in W_1, w_2 \in W_2\}.$$

证明:  $W_1 + W_2$  是  $V$  的线性子空间.