

华东师范大学期末试卷 (A): 2021—2022 学年第 1 学期

课程名称: 高等代数

教师姓名: 陆俊

学生姓名: _____

学 号: _____

专 业: _____

年级/班级: 2021 级非师范班

课程性质: 专业必修

一	二	三	四	五	六	七	八	总分	阅卷人签名

以下如无特别声明, K 均表数域, $M_{m \times n}(K)$ 表示 m 行 n 列矩阵全体, $M_n(K)$ 表示 n 阶方阵全体, I_n 表示 n 阶单位矩阵, E_{ij} 是第 i 行第 j 列为 1 且其余元素为 0 的矩阵, $r(A)$ 表示矩阵 A 的秩, $tr(A)$ 是 A 的迹, A^T 表示 A 的转置.

一、(共 10 分) 求以下置换的逆序数并判断其奇偶性:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 1 & 6 & 2 & 7 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

二、(共 10 分) 求以下 n 阶行列式的值:

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ -1 & 0 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & -1 & \cdots & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & \cdots & \cdots & -1 & 0 \end{vmatrix}.$$

三、(共 10 分) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 分别是如下矩阵的列向量:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 1 & 8 \\ 4 & -1 & 1 & 11 \end{pmatrix}.$$

(1) 给出齐次线性方程组 $AX = 0$ 的基础解系.

(2) 求向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的极大线性无关组以及秩 $r(A)$.

四、(共 20 分) 考虑矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 8 & 14 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

- (1) 求 A 的伴随矩阵 A^* 及行列式 $|A|$.
- (2) 用初等行变换方法求逆矩阵 A^{-1} (需写简要过程).
- (3) 用克莱默法则求线性方程组 $AX = B$ (需写简要过程).

五、(共 20 分) 设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

考虑线性空间 $V = M_2(K)$ 下的映射 $\varphi: V \rightarrow V$ 满足 $\varphi(X) = AX - XA$.

- (1) 证明: φ 是线性映射.
- (2) 求 φ 在标准基 $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$ 下的表示矩阵.
- (3) 求核空间 $\text{Ker}\varphi$ 的维数与基.
- (4) 求像空间 $\text{Im}\varphi$ 的维数与基.

六、(共 10 分) 设 $A \in M_n(K)$ 可逆. 证明: 分块矩阵

$$\begin{pmatrix} I_n & A^{-1} \\ A & -I_n \end{pmatrix}$$

必定可逆.

七、(共 10 分) 设 $A \in M_n(K)$ 满足 $A^2 + A = 0$. 证明:

$$r(A) + r(I_n + A) = n.$$

八、(共 10 分) 已知 $M_2(K)$ 是 K 上的线性空间. 设

$$W = \{A \in M_2(K) \mid A^2 = -|A|I_2\}.$$

证明: W 是 $M_2(K)$ 的线性子空间, 并求 $\dim W$.