

华东师范大学期中试卷: 2021—2022 学年第 1 学期

课程名称: 高等代数 教师姓名: 陆俊
 学生姓名: _____ 学 号: _____
 专 业: _____ 年级/班级: 2021 级非师范班
 课程性质: 专业必修

一	二	三	四	五	六	七	总分	阅卷人签名

以下如无特别声明, K 均表数域, $\mathbb{Q}$ ($\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$) 表有理数 (实数、复数) 域, f, g 表多项式.

一、(共 20 分) 设

$$f(x) = x^4 + 6x^3 + 14x^2 + 16x + 8.$$

- (1) 利用辗转相除法求 $f(x), f'(x)$ 的最大公因式 (需写出过程).
- (2) 求次数最小的 $u, v \in K[x]$, 满足 $uf + vg = (f, g)$.
- (3) 分别求 $f(x), f'(x)$ 的标准分解式 (在 $K = \mathbb{Q}$ 下), 并指出哪些是重因式.
- (4) 求最小公倍式 $[f, f']$.

二、(共 20 分) 求次数最小的多项式 $f(x) \in K[x]$, 满足如下同余方程组

$$\begin{cases} f(x) \equiv 1 & (\text{mod } x+1), \\ f(x) \equiv x & (\text{mod } x^2+1), \\ f(x) \equiv x^2+1 & (\text{mod } x^3). \end{cases}$$

三、(共 20 分) 求以下方程组的全部解 (要求化为简化阶梯方程组), 并求出方程组的秩.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ 5x_1 - x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 5, \\ 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 + x_4 = 2, \\ 3x_1 + 7x_2 - 2x_3 + 8x_4 = 3. \end{cases}$$

四、(共 10 分) 考虑 n 元对称多项式

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (x_i^2 + x_j^2) x_i x_j.$$

- (1) 写出 $f(x_1, \dots, x_n)$ 的首项及首项系数.
- (2) 将 f 写为初等对称多项式 $e_1, \dots, e_n$ 的表达式 ($n \geq 4$).

五、(共 10 分) 考虑置换

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 5 & 6 & 7 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 7 & 1 & 6 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

分别求 $\tau^{-1}\sigma\tau$ 及 σ^2 .

六、(共 10 分) 设

$$f(x) = 2x^4 + x^3 - 6x^2 + x + 2.$$

求 $f(x)$ 的所有有理根以及它们的重数.

七、(共 10 分) 设 p 是奇素数,

$$f(x) = (x+1)^p + (x-1)^p.$$

证明: $f(x) = 2x \cdot g(x)$, 这里 $g(x)$ 是不可约的整系数多项式.

可选附加题 (共 10 分) 设 $f(x), g(x) \in K[x]$, 且已知 $f(x)$ 的标准分解式如下:

$$f(x) = (x - a_1)^{m_1} \cdots (x - a_r)^{m_r}, \quad a_i \in K, \quad m_i > 0, i = 1, \dots, r,$$

这里诸 a_i 互不相同. 证明:

$$r(x) = \sum_{i=1}^r m_i g(a_i) \left(\frac{f(x)}{x - a_i} \right),$$

这里 $r(x)$ 是 $g(x)f'(x)$ 除以 $f(x)$ 所得的余式.