

华东师范大学期中 (B) 试卷: 2018—2019 学年第 2 学期

课程名称: 高等代数

教师姓名: 周国栋、陆俊

学生姓名: _____

学号: _____

专业: _____

年级/班级: 2018 级师范及非师范班

课程性质: 专业必修

一	二	三	四	五	六	七	总分	阅卷人签名

以下如无特别声明, K 均表数域, $\mathbb{Q}$ ($\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$) 表有理数 (实数、复数) 域, f, g 表多项式, $L(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ 表示由向量 $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ 生成的线性子空间, E_n 表示 n 阶单位阵.

一、判断题 (共 20 分) 若正确, 请给简要理由; 若错误, 请举反例:

- (1) 矩阵 $A \in M_n(\mathbb{C})$ 的诸初等因子次数之和等于 A 的秩;
- (2) 可逆多项式方阵 $A(\lambda)$ 一定没有初等因子;
- (3) 实矩阵的属于不同实特征值的特征向量必正交 (在标准欧氏内积下);
- (4) 如果复方阵 A 仅有零特征值, 则必为幂零阵 (即 $A^k = 0$, 对某正整数 k 成立).

二、(共 20 分) 考虑 n 阶 Jordan 阵 ($n > 1$)

$$J_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

- (1) 求 J_n^2 的 Jordan 标准型;
- (2) 求可逆阵 P_n , 使得 $P_n^{-1} J_n^2 P_n$ 是 Jordan 标准型.

三、(共 20 分) 设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 2 \end{pmatrix}$$

- (1) 求方程组 $AX = XA$ 的所有解;
- (2) 求 A^{-1} 的不变因子组和初等因子组;
- (3) 设 W 是方程组 $AXA = X$ 的解空间, 求 W 的维数.

四、(共 10 分) 设实二次型

$$q(x, y, z) = 2x^2 + 5y^2 + 5z^2 + 4xy - 4xz - 8yz.$$

- (1) 证明: q 是正定的;
- (2) 求正交相似变换, 使得 q 的度量阵化为对角阵, 并求该对角阵.

五、(共 10 分) 已知 $A \in M_6(\mathbb{C})$ 的特征多项式和极小多项式分别为

$$f_A(\lambda) = (\lambda + 2)^2(\lambda - 1)^4, \quad m_A(\lambda) = (\lambda + 2)(\lambda - 1)^2.$$

求 A 的所有可能的 Jordan 标准型.

六、(共 10 分) 证明: 实反对称矩阵 A 必和 $(-A)$ 相似.

七、(共 10 分) 证明: 所有满足 $A^n = 0$ 且 $A^{n-1} \neq 0$ 的 n 阶复方阵 A 必定彼此相似.