

华东师范大学期末 (A) 试卷: 2018—2019 学年第 2 学期

课程名称: 高等代数

教师姓名: 周国栋、陆俊

学生姓名: _____

学 号: _____

专 业: _____

年级/班级: 2018 级师范及非师范班

课程性质: 专业必修

一	二	三	四	五	六	七	总分	阅卷人签名

以下如无特别声明, K 均表数域, $\mathbb{Q}$ ($\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$) 表有理数 (实数、复数) 域, f, g 表多项式, $L(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ 表示由向量 $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ 生成的线性子空间, E_n 表示 n 阶单位阵.

一、判断题 (共 20 分) 若正确, 请给简要理由; 若错误, 请举反例:

- (1) 若一个实二次型正定, 则其平方项的系数均大于零;
- (2) 若矩阵 $A \in M_4(\mathbb{C})$ 满足 $A^3 = E_4$, 则 A 可对角化;
- (3) 若一个多项式矩阵行列式不为零, 则它是可逆多项式矩阵;
- (4) 设 V 是由次数不大于 2 的一元实系数多项式所组成的线性空间, 则线性映射

$$x \frac{d}{dx} : V \longrightarrow V, \quad f(x) \mapsto x \frac{df}{dx}$$

必可对角化.

二、(共 20 分) 给定实对称矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -2 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

求正交阵 T 使得 $T^{-1}AT$ 是对角阵, 并写出此对角阵.

三、(共 20 分) 设 $A \in M_4(\mathbb{C})$ 满足方程

$$(A - 2E)^2(A - E) = 0.$$

- (1) 求 A 所有可能的极小多项式;
- (2) 求 A 所有可能的初等因子组;
- (3) 求 A 所有可能的 Jordan 标准型.

四、(共 20 分) 给定整数 $m \geq 0$ 及 $2m+1$ 阶矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_m \\ 0 & E_m & 0 \end{pmatrix}.$$

定义

$$D_m = \{X \in M_{2m+1}(\mathbb{C}) \mid XA + AX = 0\}.$$

- (1) 求 A 的 Jordan 标准型;
- (2) 求 D_m 维数;
- (3) 求 D_1 中矩阵的可能的 Jordan 标准型.

五、(共 10 分) 设 A 是一个 n 阶实对称矩阵. 证明: A 是负定矩阵当且仅当 A 的所有奇数阶主子式都小于零且所有偶数阶主子式都大于零.

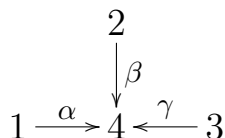
六、(共 10 分) 设 A 是一个 n 阶负定矩阵, B 是一个 n 阶实对称阵. 证明: 存在实可逆矩阵 C 使得 $C^T A C$ 与 $C^T B C$ 都是对角阵.

七、(附加题, 共 10 分) 一个有向图是指一个四元组:

$$Q = (Q_0, Q_1, s, t),$$

其中 Q_0 是顶点的集合, Q_1 是箭头的集合, 映射 $s: Q_1 \rightarrow Q_0$ 给出箭头的起点, 映射 $t: Q_1 \rightarrow Q_0$ 给出箭头的终点. 我们总假设 Q_0 与 Q_1 都是有限集合.

例: 考虑如下的有向图



这里有四个顶点, 即 $Q_0 = \{1, 2, 3, 4\}$; 有三个箭头, 即 $Q_1 = \{\alpha, \beta, \gamma\}$, 并且箭头的起点与终点如下给出:

$$\begin{aligned} s(\alpha) &= 1, & s(\beta) &= 2, & s(\gamma) &= 3, \\ t(\alpha) &= 4, & t(\beta) &= 4, & t(\gamma) &= 4. \end{aligned}$$

给定有向图 $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$, 不妨设顶点集 $Q_0 = \{1, 2, \dots, n\}$. 它的二次型定义如下: 对于 $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$q_Q(x) = \sum_{i \in Q_0} x_i^2 - \sum_{\alpha \in Q_1} x_{s(\alpha)} x_{t(\alpha)}.$$

对一个由非负整数组成的向量 $x = (x_1, \dots, x_n)$, 若满足 $q_Q(x) = 1$, 则称它为二次型 q_Q 的正根.

- (1) 给出上例箭图所定义的二次型;
- (2) 证明 (1) 中的二次型是正定的;
- (3) 求 (1) 中的二次型的正根.