

华东师范大学期中试卷: 2018—2019 学年第 2 学期

课程名称: 高等代数

教师姓名: 周国栋、陆俊

学生姓名: _____

学号: _____

专业: _____

年级/班级: 2018 级师范及非师范班

课程性质: 专业必修

一	二	三	四	五	六	七	总分	阅卷人签名

以下如无特别声明, K 均表数域, $\mathbb{Q}$ ($\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$) 表有理数 (实数、复数) 域, V 是 K 上的有限维线性空间, $L(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ 是由向量 $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in V$ 生成的线性子空间.

一、判断题, 正误都请简要给出理由 (共 20 分)

- (1) 给定直和分解 $V = W_1 \oplus \dots \oplus W_r$, 则存在线性变换 $\varphi: V \rightarrow V$, 使得每个 W_i 都恰好是 φ 的特征子空间.
- (2) 给定 $\lambda \in K$ 及 V 的非零线性子空间 W , 则存在线性变换 $\varphi: V \rightarrow V$ 使得 λ 为 φ 的特征值, W 为属于 λ 的特征子空间.
- (3) 设 $f: V \times V \rightarrow K$ 是 V 上的双线性函数, 则 f 非退化的充要条件是: 若对于任意的 $\alpha \in V$ 有 $f(\alpha, \beta) = 0$, 则可推出 $\beta = 0$.
- (4) 一个实二次型是半正定的当且仅当所有的顺序主子式非负.

二、(共 15 分) 设 $W_1 = L(\alpha_1, \alpha_2)$ 和 $W_2 = L(\beta_1, \beta_2)$ 是 $V = K^4$ 中的线性子空间, 这里

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= (0, 1, 0, -1), & \alpha_2 &= (1, 0, 1, 2), \\ \beta_1 &= (2, -1, 0, 1), & \beta_2 &= (-3, 1, 3, 5). \end{aligned}$$

分别求 $W_1 + W_2$, $W_1 \cap W_2$ 的维数与基.

三、(共 15 分) 设 $V = \mathbb{R}^4$ 是标准欧氏空间,

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= (1, 1, 0, 1), & \alpha_2 &= (2, 1, -1, 1), \\ \alpha_3 &= (1, -1, 2, 1), & \beta &= (1, 2, -1, 0). \end{aligned}$$

- (1) 求 $W = L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 的一组标准正交基.
- (2) 求 W 的正交补空间 $W^\perp$ (要求写出基).
- (3) 求 β 在 W 上的正交投影 $P_W(\beta)$.

四、(共 10 分) 请用非奇异变量替换将如下实二次型化为标准型

$$q(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xy + 4yz,$$

并写出具体的线性变换. 此二次型的正惯性指数与负惯性指数分别是多少?

五、(共 20 分) 设

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (1) 求特征多项式 $f_A(\lambda)$ 和极小多项式 $m_A(\lambda)$.
- (2) 求所有的特征子空间 (要求写出基).
- (3) 证明: A 可对角化, 并求出可逆矩阵 P 使得 $P^{-1}AP$ 为对角阵.
- (4) 设线性变换 $\varphi: K^3 \rightarrow K^3$ 在自然基下的表示矩阵为 A , 求 A 的所有不变子空间.

六、(共 10 分) 设 $A \in M_n(K)$ 及 $a, b \in K$ ($a \neq b$), 证明: 如果

$$\text{rank}(A - aE) + \text{rank}(A - bE) = n,$$

则 A 可对角化 (这里 E 是 n 阶单位阵).

七、(共 10 分) 一个线性空间上的二次型称为非退化的, 若它对应的对称双线性函数是非退化的.

设 q 是二维空间 V 上的非退化的二次型. 证明: 若存在非零向量 $\alpha \in V$ 使得 $q(\alpha) = 0$, 则在某一组基下, q 的度量矩阵为 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.