

华东师范大学期末试卷 (B): 2018—2019 学年第 1 学期

课程名称: 高等代数 I

教师姓名: 罗秉、 陆俊

学生姓名: _____

学 号: _____

专 业: _____

年级/班级: 2018 级师范、非师范班

课程性质: 专业必修

一	二	三	四	五	六	七	总分	阅卷人签名

一、(25 分) 判断下述命题是否正确, 并给出理由.

(1) 齐次线性方程组的解集一定构成线性空间.

(2) 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性相关, 则一定存在某个 α_k 可以写成

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k-1}, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n$$

的线性组合.

(3) 已知矩阵满足 $AB = E_n$, 则 A, B 一定是可交换的.

(4) 两个非零矩阵的乘积有可能是零矩阵.

(5) 对任意线性映射 $\mathcal{A}: V \rightarrow W$, 有 $\dim \text{Ker} \mathcal{A} + \dim \text{Im} \mathcal{A} = \dim W$.

二、(15 分) 求以下线性方程组的通解 (要求写成列向量表达式):

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 5 \\ 4 & 3 & 0 & 8 \\ 1 & 1 & 5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

三、(10 分) 求 A 的伴随矩阵 A^* 及逆矩阵 A^{-1} , 这里

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 7 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

四、(共 15 分) 计算以下行列式的值:

$$D_n = \begin{vmatrix} x & y & y & \cdots & y \\ y & x & y & \cdots & y \\ y & y & x & \cdots & y \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y & y & y & \cdots & x \end{vmatrix}_{n \times n}.$$

五、(15 分) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 分别是矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 3 \\ 9 & 4 & 7 & 6 \\ 7 & 3 & 6 & 5 \\ 5 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

的列向量.

- (1) 求方程组 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 + x_4\alpha_4 = 0$ 的所有解 (x_1, x_2, x_3, x_4) .
- (2) 求向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的极大线性无关组.

六、(10 分) 求置换 σ 的逆序数 $N(\sigma)$ 并判断奇偶性:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 7 & 2 & 5 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

七、(10 分) 已知 $B \in M_n(\mathbb{K})$, 求证:

$$\mathcal{A}: M_n(\mathbb{K}) \rightarrow M_n(\mathbb{K}), \quad \mathcal{A}(X) = BX$$

是线性映射, 并求出 $\mathcal{A}$ 在基 E_{ij} ($1 \leq i, j \leq n$) 下对应的表示矩阵, 这里 E_{ij} 代表第 i 行第 j 列位置的元素为 1, 其它元素为 0 的 n 阶方阵.