

华东师范大学期末试卷 (A): 2018—2019 学年第 1 学期

课程名称: 高等代数 I

教师姓名: 罗秉、陆俊

学生姓名: _____

学号: _____

专业: _____

年级/班级: 2018 级师范、非师范班

课程性质: 专业必修

一	二	三	四	五	六	七	总分	阅卷人签名

一、(25 分) 判断下述命题是否正确, 并给出理由.

- (1) 非齐次线性方程组的解集一定不构成线性空间.
- (2) 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性相关, 则 α_n 必可写为 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}$ 的线性组合 ($n > 1$).
- (3) 若矩阵 $A \in M_{m \times m}(K)$ 不满秩, 则对任意 $B \in M_{m \times n}(K)$, 一定有 $\text{rank}(AB) < \text{rank}(B)$.
- (4) 对任意的两个矩阵 A, B , 只要乘法 AB 和 BA 都有意义, 则一定有 $\det(AB) = \det(BA)$;
- (5) 线性映射 $\varphi: V \rightarrow W$ 的像空间维数 $\dim \text{Im} \varphi$ 不可能超过 $\dim V$.

二、(15 分) 设 $\mathbb{Q}$ 是有理数域,

$$V = \{a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Q}\}.$$

- (1) 验证 V 是 $\mathbb{Q}$ 上的线性空间 (在普通的运算意义下).
- (2) 设 $\alpha \in V$ 是给定的非零元, 证明: 映射

$$\varphi_\alpha: V \longrightarrow V, \quad \varphi_\alpha(x) = \alpha x$$

是线性同构.

- (3) 给定 V 的基 $\{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6}\}$, 求线性映射 $\varphi_{\sqrt{2}}$ 在该基下对应的表示矩阵.

三、(15 分) 至少用两种方法求 A 的逆:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 1 & 2 & & \\ 2 & 1 & 3 & \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

四、(10 分) 计算以下行列式的值

$$D_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \end{vmatrix}_{n \times n}$$

五、(10 分) 每行每列只有一个元素为 1, 其它元素都是 0 的方阵称为置换矩阵; 每行每列元素之和都为 1 的矩阵称为概率转移矩阵. 求证:

- (1) 置换矩阵的乘积仍是置换矩阵;
- (2) 概率转移矩阵的乘积仍是概率转移矩阵.

六、(20 分) 设线性映射 $\varphi: K^4 \rightarrow K^4$ 在标准基下对应的表示矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 4 & 7 & 6 & 5 \\ 3 & 6 & 5 & 4 \\ 2 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

- (1) 求 $\text{Ker}\varphi$ 的维数与基.
- (2) 求 $\text{Im}\varphi$ 的维数与基.

七、(5 分) 给定正整数 k , 已知 n 阶方阵 A 满足 $\text{rank}(A^k) = \text{rank}(A^{k+1})$. 求证: 对任意正整数 s , 一定有 $\text{rank}(A^k) = \text{rank}(A^{k+s})$.