

华东师范大学期中试卷: 2018—2019 学年第 1 学期

课程名称: 高等代数

教师姓名: 罗秉、陆俊

学生姓名: _____

学 号: _____

专 业: _____

年级/班级: 2018 级师范及非师范班

课程性质: 专业必修

一	二	三	四	五	六	七	总分	阅卷人签名

以下如无特别声明, K 均表数域, $\mathbb{Q}$ ($\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$) 表有理数 (实数、复数) 域, f, g 表多项式.

一、判断题, 正误都请给出理由 (共 25 分)

- (1) 一个多项式如果有根, 则它一定是可约的.
- (2) 如果多项式 $f(x), g(x)$ 互素, 则使得 $u(x)f(x) + v(x)g(x) = 1$ 成立的多项式 $u(x), v(x)$ 也一定是互素的.
- (3) 形式导数 $f'(x)$ 的 k 重根一定是 $f(x)$ 的 $k+1$ 重根.
- (4) 多元多项式 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 在字典序下的首项一定是关于不定元 x_1 的最高次数项之一.
- (5) 对称多元多项式的每个齐次分量都一定是对称多项式.

二、(共 20 分) 设

$$\begin{cases} f = x^4 + 6x^3 + 8x^2 - 6x - 9, \\ g = x^3 + x^2 - 5x + 3. \end{cases}$$

- (1) 利用辗转相除法求 f, g 的最大公因式 (需写出过程).
- (2) 求次数最小的 $u, v \in K[x]$, 满足 $uf + vg = (f, g)$.
- (3) 求 f, g 的最小公倍式.
- (4) 写出 f, g 的标准分解式 (在 $K = \mathbb{Q}$ 下), 并指出哪些不可约因式是重因式.

三、(共 10 分) 求次数最小的多项式 $f(x) \in K[x]$, 满足如下同余方程组

$$\begin{cases} f(x) \equiv 1 & (\text{mod } x+1), \\ f(x) \equiv x+2 & (\text{mod } x^2+1), \\ f(x) \equiv x+1 & (\text{mod } x^3). \end{cases}$$

四、(共 15 分) 设 $K = \mathbb{Q}$,

$$f(x) = 2x^5 - 3x^4 + 4x^3 - 5x^2 + 2.$$

- (1) 求形式导数 $f'(x)$ 和 $f''(x)$;
- (2) 求 $f(x)$ 的所有有理根及它们的重数.

五、(共 10 分) 考虑 n 元多项式

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i < j} (x_i + x_j)x_i x_j.$$

- (1) 写出 $f(x_1, \dots, x_n)$ 的首项.
- (2) 将 $f(x_1, \dots, x_n)$ 写为初等对称多项式 $e_1, \dots, e_n$ 的表达式.

六、(共 10 分) 考虑置换

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

分别求 $\sigma\tau$, σ^2 以及 τ^{-1} .

七、(共 10 分) 证明: 不存在数域 K , 满足 $\mathbb{R} \subsetneq K \subsetneq \mathbb{C}$.