

华东师范大学期末试卷 (A)

2016—2017 学年第二学期

课程名称: 高等代数与解析几何II

教师姓名: 罗秉、 陆俊

学生姓名: _____

学 号: _____

专 业: _____

年级/班级: 2016 级非师范班

课程性质: 专 业 必 修

一	二	三	四	五	六	七	八	九	总分	阅卷人签名

一、 简述题 (共 10 分)

- (1) 例举本课程中出现过的各种等价关系 (至少五种);
- (2) 例举矩阵相似的相似不变量 (至少五种).

二、 (共 10 分) 已知 5 阶方阵 A 的特征多项式 $\chi_A(\lambda)$ 与极小多项式 $m_A(\lambda)$ 分别为

$$\begin{aligned}\chi_A(\lambda) &= (\lambda - 1)^3(\lambda + 2)^2, \\ m_A(\lambda) &= (\lambda - 1)^2(\lambda + 2).\end{aligned}$$

求 A 的 Jordan 典范型.

三、 (共 15 分) 设

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

求 A 的 Jordan 典范型 J 以及变换矩阵 P (满足 $P^{-1}AP = J$).

四、 (10 分)

- (1) 设 A 是 10 阶矩阵, 它的初等因子组为

$$\lambda - 1, \quad \lambda - 1, \quad (\lambda - 1)^2, \quad (\lambda + 1)^2, \quad (\lambda + 1)^3, \quad \lambda - 2.$$

求 A 的不变因子组.

- (2) 已知矩阵的不变因子组为

$$1, \quad \dots, \quad 1, \quad \lambda, \quad \lambda^2(\lambda - 1), \quad (\lambda - 1)^3(\lambda + 1)\lambda^2.$$

求它的初等因子组.

五、(10 分) 求所有 4 阶复方阵 X , 满足方程

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & & \\ & 2 & & \\ & & 2 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} X = X \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 2 & 1 & \\ & & 2 & 1 \\ & & & 2 \end{pmatrix}.$$

六、(15 分) 设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

求 A^{10} 及 e^A .

七、(10 分) 设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(1) 求 A 的满秩分解 $A = UV$.

(2) 求 A 的 Moore-Penrose 广义逆 A^+ , 这里

$$A^+ = V^T(VV^T)^{-1}(U^TU)^{-1}U^T.$$

八、(10 分) 举例说明: 两个具有相同的特征多项式和极小多项式的 n 阶复矩阵未必相似.

九、(10 分) 设 N_k^- 是所有 k 阶下三角幺幂矩阵 (即对角线全为 1 的下三角阵) 构成的集合; N_n^+ 为所有 n 阶上三角幺幂矩阵 (即对角线全为 1 的上三角阵) 构成的集合; $M_{k,n}$ 是所有 $k \times n$ 阶矩阵构成的集合. 在 $M_{k,n}$ 中定义如下关系:

$$A \sim B \stackrel{\text{def}}{\iff} \exists P \in N_k^-, Q \in N_n^+, \text{ 使得 } A = PBQ.$$

(1) 证明: $\sim$ 是 $M_{k,n}$ 上的等价关系.

(2) 设 $r = \min\{k, n\}$, 证明: $\Delta_1, \dots, \Delta_r$ 是上述等价关系的不变量 (其中 Δ_i 是指矩阵的第 i 个顺序主子式), 即满足该等价关系的两个矩阵有相同的 Δ_i ($i = 1, \dots, r$).