

华东师范大学期中试卷
2016—2017 学年第二学期

课程名称: <u>高等代数与解析几何II</u>	教师姓名: <u>罗秉、 陆俊</u>
学生姓名: _____	学 号: _____
专 业: _____	年级/班级: <u>2016 级非师范班</u>
课程性质: <u>专 业 必 修</u>	

一	二	三	四	五	六	七	八	九	总分	阅卷人签名

一、(共 20 分) 给定 $\mathbb{R}^3$ 上的两组基:

$$\begin{aligned}\xi_1 &= (0, 1, 1), & \xi_2 &= (1, 0, 1), & \xi_3 &= (1, 1, 0), \\ \eta_1 &= (1, -1, 2), & \eta_2 &= (2, -1, 1), & \eta_3 &= (-2, 1, 1).\end{aligned}$$

设 $\varphi: V \rightarrow V$ 是线性变换, 满足 $\varphi(\xi_i) = \eta_i$.

- (1) 求由基 ξ_1, ξ_2, ξ_3 到基 η_1, η_2, η_3 的过渡矩阵.
- (2) 求 φ 在基 ξ_1, ξ_2, ξ_3 下的表示矩阵.
- (3) 求 φ 在基 η_1, η_2, η_3 下的表示矩阵.
- (4) 设 $\alpha = (1, 0, 0)$, 分别求 $\varphi(\alpha)$ 在基 ξ_1, ξ_2, ξ_3 和 η_1, η_2, η_3 下的坐标.
- (5) 求 α 到 $W = L(\xi_1, \xi_2)$ 上的正交投影 $P_W(\alpha)$ (这里 $\mathbb{R}^3$ 作为标准欧氏空间).

二、(共 5 分) 试构造一个复数域间的映射 $\varphi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, 使得

- (1) 当 $\mathbb{C}$ 作为实数域 $\mathbb{R}$ 上的 2 维线性空间时, φ 是 $\mathbb{R}$ -线性的;
- (2) 而当 $\mathbb{C}$ 视为复数域 $\mathbb{C}$ 上的 1 维线性空间时, φ 不是 $\mathbb{C}$ -线性的.

三、(共 15 分) 设

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

求正交矩阵 P 使得 $P^T A P$ 为对角阵, 并写出对角阵.

四、(15 分) 设二次型

$$q(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 2\lambda x_1 x_2 + 2x_1 x_3.$$

- (1) 问: λ 取何值时, 二次型 q 是正定的?
(2) 当 $\lambda = 1$ 时, 请将 q 化为平方和.

五、(5 分) 设 V 是 K 上线性空间, V^* 是其对偶空间. 设 $f, g \in V^*$ 满足 $\text{Ker} f = \text{Ker} g$. 证明: 存在常数 $\lambda \in K$, 使得 $g = \lambda f$.

六、(10 分) 设 $M_n(K)$ 是 n 阶方阵构成的线性空间, $\varphi: M_n(K) \rightarrow K$ 是线性映射, 且满足

$$\varphi(AB) = \varphi(BA), \quad \forall A, B \in M_n(K).$$

- (1) 证明: $E_{ij} \in \text{Ker} \varphi$ ($i \neq j$), 这里 E_{ij} 是第 i 行第 j 列元素为 1, 其余位置的元素为零的 n 阶方阵.
(2) 证明: $\varphi = \lambda \text{Tr}$, 这里 $\lambda \in K$, $\text{Tr}(X)$ 表方阵 X 的迹.

七、(10 分) 设 A, B 是正定实对称矩阵, 且 $AB = BA$. 证明: AB 也是正定实对称的.

八、(10 分) 设 V 是欧氏空间, φ, ψ 是 V 的线性变换, 满足

$$(\varphi(\alpha), \beta) = (\alpha, \psi(\beta)).$$

- (1) 设 φ, ψ 在 V 的规范正交基 $e_1, \dots, e_n$ 下的表示矩阵分别为 A, B . 证明: $A = B^T$.
(2) 证明: $\varphi\psi = \psi\varphi$ 当且仅当

$$(\varphi(\alpha), \varphi(\alpha)) = (\psi(\alpha), \psi(\alpha)), \quad \forall \alpha \in V.$$

九、(10 分) 设 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ 是 K 中 n 个不同的数, $\varphi: V \rightarrow V$ 是线性变换, 在基 $\xi_1, \dots, \xi_n$ 下的表示矩阵 $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

- (1) 设 W 是 φ 的不变子空间, $x_1\xi_1 + \dots + x_n\xi_n \in W$. 证明: 若 $x_i \neq 0$, 则 $\xi_i \in W$.
(2) 求 φ 的不变子空间的个数.