

华东师范大学期末试卷 (B): 2016—2017 学年第 1 学期

课程名称: 高等代数

教师姓名: 罗秉、陆俊

学生姓名: _____

学号: _____

专 业: _____

年级/班级: 2016 级非师范班

课程性质: 专业必修

一	二	三	四	五	六	七	总分	阅卷人签名

一、叙述题 (10 分)

设 A 是 n 阶方阵, 请给出 A 可逆的定义以及等价条件 (至少三种).

二、(15 分) 计算以下行列式的值 ($n > 1$)

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & x_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & x_{n-1} \end{vmatrix}$$

三、(共 20 分)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & -3 & 1 \\ 4 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

(1) 求逆矩阵 A^{-1} .

(2) 设 $\alpha_1, \dots, \alpha_4$ 依次是 A 的列向量. 求内积 (α_1, α_2) (这里 α_i 视为标准欧氏空间的向量).

(3) 求 α_3, α_4 之间的夹角.

(4) 求 $L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 的一组标准正交基.

四、(15 分) 设 $\varphi: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ 是线性映射, 在标准基下对应矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

- (1) 求 $\text{Ker}\varphi$ 的维数与基.
- (2) 求 $\text{Im}\varphi$ 的维数与基.

五、(15 分) 设 $V = \mathbb{R}^n$ 和 $W \rightarrow \mathbb{R}^1$ 是标准欧氏空间, $\alpha \in V$ 是非零向量.

(1) 证明:

$$\varphi_\alpha: V \rightarrow W, \quad \beta \mapsto (\alpha, \beta)$$

是满的线性映射, 并求它在标准基下的表示矩阵.

(2) 证明: 对任何非零线性映射 $\psi: V \rightarrow W$, 都存在非零向量 $\alpha \in V$ 使得 $\psi = \varphi_\alpha$.

六、(15 分) 设 A 是 n 阶实系数方阵且满足 $A^2 = I_n$, 这里 I_n 是 n 阶单位阵. 设

$$\begin{aligned} V_1 &= \{X \in \mathbb{R}^n \mid (I_n - A)X = 0\}, \\ V_2 &= \{X \in \mathbb{R}^n \mid (I_n + A)X = 0\}, \end{aligned}$$

- (1) 证明: $\mathbb{R}^n = V_1 \oplus V_2$.
- (2) 证明: $\text{rank}(I_n - A) + \text{rank}(I_n + A) = n$.

七、(10 分) 甲乙二人轮流在一个 2017×2017 的矩阵中填放任意数字直至填满. 若最后得到的矩阵不可逆, 则甲胜; 否则乙胜. 问: 谁有必胜策略? 并简述此策略.