

华东师范大学期末试卷 (A): 2016—2017 学年第 1 学期

课程名称: 高等代数

教师姓名: 罗乘、陆俊

学生姓名: _____

学号: _____

专业: _____

年级/班级: 2016 级非师范班

课程性质: 专业必修

一	二	三	四	五	六	七	八	总分	阅卷人签名

一、是非判断题 (每题 2 分, 共 10 分)

- (1) 已知矩阵 A, B 满足 $AB = 0$ 且 $B \neq 0$, 则 $A = 0$.
- (2) 已知线性映射 $\varphi: V \rightarrow W$ 是单射, 则 $\dim V \leq \dim W$.
- (3) 对直和 $V \oplus W$, 有 $\dim V \oplus W = \dim V \cdot \dim W$.
- (4) 如果方阵 A 有一个非零 r 阶子式, 那么 $\text{rank}(A) \geq r$.
- (5) 欧氏空间的度量矩阵必是满秩的.

二、(15 分) 已知 n 阶方阵

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

求 A 的所有元素的代数余子式之和 $\sum_{i,j} A_{ij}$.

三、(共 15 分) 计算以下行列式的值

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 + 3 \cos \alpha & 2 + 3 \cos \beta & 2 + 3 \cos \gamma & 2 + 3 \cos \eta \\ \cos \alpha + \cos^2 \alpha & \cos \beta + \cos^2 \beta & \cos \gamma + \cos^2 \gamma & \cos \eta + \cos^2 \eta \\ \cos^2 \alpha - \cos^3 \alpha & \cos^2 \beta - \cos^3 \beta & \cos^2 \gamma - \cos^3 \gamma & \cos^2 \eta - \cos^3 \eta \end{vmatrix}$$

四、(15 分) 考虑矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 7 & -2 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & 0 & 1 \\ 5 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) 求 A 的伴随矩阵 A^* 及逆矩阵 A^{-1} .

(2) 利用初等行变换的方法求 B^{-1} .

五、(15 分) 考虑标准欧氏空间 $\mathbb{R}^4$ 中的向量组

$$\alpha_1 = (1, 1, 1, 1), \quad \alpha_2 = (2, 0, 2, 0), \quad \alpha_3 = (0, 1, 2, 2).$$

(1) 求它们两两之间的内积和夹角.

(2) 求 $L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 的标准正交基.

六、(12 分) 已知 $A \in M_{m,n}(K)$, $B \in M_{n,m}(K)$ 且 $m > n$. 证明: 行列式 $|AB| = 0$.

七、(10 分) 设 n 阶方阵 A, B 满足 $A + B = AB$.

(1) 证明: $B - I_n$ 可逆并且 $A = B(B - I_n)^{-1}$ (这里 I_n 是单位矩阵).

(2) 证明: $AB = BA$.

八、(8 分) 设 $\varphi: V \rightarrow V'$ 是线性映射. 对任何 $\alpha \in V$, 定义

$$[\alpha] := \{\alpha + \eta \mid \eta \in \text{Ker}\varphi\}.$$

以及集合 $V/\text{Ker}\varphi := \{[\alpha] \mid \alpha \in V\}$.

(1) 证明: $[\alpha] = [\beta]$ 当且仅当 $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta)$.

(2) 证明: $V/\text{Ker}\varphi$ 在如下定义的运算下构成线性空间

$$[\alpha] + [\beta] := [\alpha + \beta], \quad k[\alpha] := [k\alpha], \quad k \in K.$$

(3) 证明:

$$\bar{\varphi}: V/\text{Ker}\varphi \longrightarrow \text{Im}\varphi, \quad [\alpha] \mapsto \varphi(\alpha)$$

是线性同构.