

华东师范大学期中试卷: 2016—2017 学年第 1 学期

课程名称: 高 等 代 数

教师姓名: 罗 秉、 陆 俊

学生姓名: _____

学 号: _____

专 业: _____

年级/班级: 2016 级非师范班

课程性质: 专 业 必 修

一	二	三	四	五	六	七	八	总分	阅卷人签名

以下如无特别声明, K 均表数域, $\mathbb{Q}$ ($\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$) 表有理数 (实数、复数) 域, f, g 表多项式, α, β 表向量.

一、(共 20 分) 叙述以下概念 (任选四项, 多选扣分):

- (1) 艾森斯坦判别法; (2) 因式分解定理; (3) 本原多项式;
(4) 带余数除法; (5) 线性空间的维数; (6) 线性子空间.

二、(共 20 分) 设

$$\begin{cases} f = 4x^4 - 3x^3 + 2x^2 - x - 2, \\ g = x^3 - 2x^2 + 4x - 3. \end{cases}$$

- (1) 利用辗转相除法求 f, g 的最大公因式 (需写出过程).
(2) 求 $u, v \in K[x]$, 使得 $\deg u \leq 2$, $\deg v \leq 3$ 且满足

$$uf + vg = (f, g).$$

- (3) 求 f, g 的最小公倍数.
(4) 在 $K = \mathbb{Q}$ 上, 分级别将 f, g 分解成本原多项式的乘积, 并指出哪些因式是重因式.

三、(共 10 分) 考虑 $K = \mathbb{R}$ 上的多项式

$$f(x) = x^5 - 3x^4 + 5x^2 - 7x^2 + 6x - 2.$$

- (1) 求形式导数 $f'(x), f''(x), \dots, f^{(5)}(x)$.
(2) 求 $f(x)$ 的重根及其重数.

四、(10 分) 设 $f(x) = ax^2 + 2bx + c$ 是整系数本原多项式. 判断如下结论是否成立: $f(x)$ 可约当且仅当 $b^2 - ac$ 是某个整数的平方. 如对, 请给出证明; 如错, 请举出反例.

五、(10 分) 求以下方程组的解:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -2, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 = -1, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 5x_4 = -9, \\ 5x_1 + 6x_2 + x_3 + 14x_4 = 14. \end{cases}$$

(要求写出过程及简化阶梯矩阵, 并将通解写成列向量形式.)

六、(10 分) 考虑 n 元多项式

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i < j} (x_i - x_j)^2 x_i x_j.$$

(1) 写出 $f(x_1, \dots, x_n)$ 的首项.

(2) 将 $f(x_1, \dots, x_n)$ 写为初等对称多项式 $e_1, \dots, e_n$ 的表达式.

七、(10 分) 考虑向量组

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= (1, 1, 2, 3), & \alpha_2 &= (2, 5, -1, 1), \\ \alpha_3 &= (3, -t, -2, 3), & \alpha_4 &= (4, 5, -1, t+3). \end{aligned}$$

(1) 取 $t = 1$, 求向量空间 $L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ 的一组基以及它的维数.

(2) 取 $t = 0$ 及 $\beta = (1, 0, 0, 0)$, 将 β 写成 $\alpha_1, \dots, \alpha_4$ 的线性组合.

八、(10 分) 设 L 是向量空间, L_1, L_2 是其线性子空间.

(1) 证明: $L_1 \cap L_2$ 也是线性子空间.

(2) 举例说明: $L_1 \cup L_2$ 不一定是线性子空间.

(3) 证明: 存在包含 L_1, L_2 的最小子空间 L_3 (即对任何包含 L_1, L_2 的其他子空间 L' , 均有 $L_3 \subseteq L'$).