

华东师范大学期中试卷: 2014—2015 学年第 2 学期

课程名称: 组 合 与 图 论 教师姓名: 陆俊
 学生姓名: _____ 学 号: _____
 专 业: _____ 年级/班级: 2012 级师范班
 课程性质: 专 业 必 修

一	二	三	四	五	六	七	八	九	总分	阅卷人签名

前八题考分小于 80 分者, 附加题分无效.

一、(20 分) 简述以下概念和结论 (任选四项).

- | | |
|--------------------------|-------------------------|
| (1) Ramsey 数 $r(a, b)$; | (2) Bell 数及其指数型生成函数; |
| (3) 容斥原理; | (4) 正规多项式列及关联微分算子; |
| (5) Lah 数; | (6) 第 I 类 Stirling 数. |

二、(共 10 分) 求方程

$$x_1 + x_2 + x_3 = 14.$$

正整数解的个数.

三、(10 分) 求以下递推式的解

$$a_n = 18a_{n-1} - 80a_{n-2}, \quad a_1 = 8, \quad a_2 = 73.$$

四、(共 10 分) 证明: 任取 11 个正整数, 证明: 其中存在两个整数, 它们具有相同的末位数.

五、(共 10 分) 有 r 件不同的礼物分给 n 个女孩和 p 个男孩, 求使每个女孩至少得到一件礼物的分法数.

六、(共 20 分) (1) 证明: 第 II 类 Stirling 数满足如下恒等式

$$S(n+1, k) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} S(n-i, k-1).$$

(2) 利用上述结论直接计算 $S(n, 2)$ 及 $S(n, 3)$ 的值.

七、(共 10 分) 设 $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $\Lambda = [1, 1, 1, 0, 0, 0]$. 分别求 X 的 Λ 型划分数与 Λ 型置换数.

八、(共 10 分) 设 $f(x) = x^2$. 求所有的差分 $\Delta^i f(0)$ ($i = 0, 1, 2, \dots$) 并利用差分求和公式证明

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

九、(可选附加题 共 20 分) 设 X 是 n 元集合. 如果 X 的一个子集族 $\{C_i\}_{i=0}^n$ 满足以下条件, 则称之为完全链:

$$\emptyset = C_0 \subseteq C_1 \subseteq C_2 \subseteq \dots \subseteq C_n = X, \quad \text{且 } |C_i| = i, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

如果一个子集 Y 出现在完全链中, 我们就说该链穿过 Y .

如果一个子集族 $\mathcal{F}$ 中任何两个元素都不存在包含关系, 我们就称 $\mathcal{F}$ 是反链.

(1) 求所有完全链的个数以及所有穿过 Y 的完全链的个数.

(2) 设 $\mathcal{F}$ 是反链, $\mathcal{F}$ 中的 k 元子集的个数为 m_k ($k = 0, 1, \dots, n$), 求穿过 $\mathcal{F}$ 中元素的所有完全链的个数.

(3) 利用上述结果证明 $|\mathcal{F}| \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ 并举例说明等号可以成立.