

华东师范大学期中试卷: 2014—2015 学年第 1 学期

课程名称: 拓 扑 学 教师姓名: 陆俊  
 学生姓名: \_\_\_\_\_ 学 号: \_\_\_\_\_  
 专 业: \_\_\_\_\_ 年级/班级: 2014 级非师范班  
 课程性质: 专 业 必 修

| 一 | 二 | 三 | 四 | 五 | 六 | 七 | 总分 | 阅卷人签名 |
|---|---|---|---|---|---|---|----|-------|
|   |   |   |   |   |   |   |    |       |

以下如无特别声明,  $X, Y$  等均表示拓扑空间.

一、(20 分) 简述以下概念或结论 (任选四项).

- (1) 拓扑基; (2) Hausdorff 空间; (3) 连通分支;  
 (4) 聚点; (5) 拓扑空间; (6) 度量拓扑.

二、(共 36 分) 设  $X = \mathbb{R}^1$  是实数集,

$$\mathcal{B}_1 = \{(a, b) \mid a < b, a, b \text{ 均为实数}\}.$$

(1) 证明:  $\mathcal{B}_1$  是  $X$  的拓扑基.

(2) 设  $\mathcal{T}_1$  是由  $\mathcal{B}_1$  生成的拓扑,  $\mathcal{T}_2$  是  $X$  的标准拓扑. 试比较  $\mathcal{T}_1$  与  $\mathcal{T}_2$  的粗细, 并验证你的结论.

(3) 验证: 如下形式的射线皆为  $(X, \mathcal{T}_1)$  中既开又闭的集合:

$$(-\infty, a], \quad (a, +\infty).$$

(4) 证明: 如下形式的区间或射线不可能是  $(X, \mathcal{T}_1)$  中的开集:

$$[a, +\infty), \quad [a, b).$$

(5) 设  $Y = (0, 1)$ . 我们用  $\bar{Y}_1, \bar{Y}_2$  分别表示  $Y$  在  $(X, \mathcal{T}_1)$  及  $(X, \mathcal{T}_2)$  下的闭包. 试求  $\bar{Y}_1$  和  $\bar{Y}_2$  (要求写出过程).

(6) 证明:  $(X, \mathcal{T}_1)$  的连通子集都是单点集.

三、(24 分) 设  $(X, d)$  是由度量  $d$  诱导的度量空间.

(1) 证明:  $(X, d)$  是 Hausdorff 的.

(2) 证明:  $(X, d)$  中的紧子集都是有界闭集.

(3) 取  $X = \mathbb{R}^1$ ,  $d$  为标准度量. 证明:  $X$  中任何有界闭集必为紧集.

四、(共 10 分) 证明:

$$D^2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$$

作为欧氏度量空间  $\mathbb{R}^2$  的子空间是连通的.

五、(共 10 分) 设  $X, Y$  是拓扑空间,  $A \subseteq X, B \subseteq Y$ , 证明:

$$\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}.$$

六、(可选附加题 共 15 分) 设  $X = \mathbb{Z}$  是整数集,  $a, b \in \mathbb{Z}, b > 0$ , 令

$$N_{a,b} = \{a + nb \mid n \in \mathbb{Z}\}.$$

一个子集  $U(\subseteq X)$  称为“好的”, 如果  $U = \emptyset$  或者对任何  $a \in U$ , 都存在  $b > 0$ , 使得  $N_{a,b} \subseteq U$ .

(1) 证明:

$$\mathcal{T} = \{\text{所有好的子集}\}$$

给出了  $\mathbb{Z}$  上的一个拓扑, 并且  $N_{a,b}$  是既开又闭的集合.

(2) 试利用以上结论证明: 素数个数无限.