

华东师范大学期末试卷 (B): 2013—2014 学年第 2 学期

课程名称: 近世代数 II

教师姓名: 陆俊

学生姓名: _____

学 号: _____

专 业: _____

年级/班级: 2011 级非师范班

课程性质: 专 业 必 修

一	二	三	四	五	六	七	总分	阅卷人签名

声明: 以下的不定项选择题是指正确答案可能是单项也可能是多项.

一、(共 20 分) 简述以下概念和结论 (任选四项, 多写扣分).

- (1) 齐性空间; (2) 正规扩张; (3) 分裂域;
(4) 伽罗瓦群; (5) 单代数扩张升链; (6) 不动域.

二、(单项选择题, 共 20 分) 设 $G = D_4$ 是 4 阶二面体群, $X = G$, $H = \langle S \rangle < G$ 是由反射变换 S 生成的子群. 考虑 G 在 X 上的共轭作用.

- (1) X 共有 _____ 个轨道.
(A) 3, (B) 4, (C) 5, (D) 6, (E) 8.

- (2) X 中有 _____ 个不动元素.
(A) 1, (B) 2, (C) 3, (D) 4, (E) 5.

- (3) 反射变换 S 的稳定子群同构于
(A) $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$, (B) $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4$, (C) $\mathbb{Z}_2$, (D) $\mathbb{Z}_4$, (E) $\mathbb{Z}_8$.

- (4) H 在 X 上的限制共轭作用是否与它在 X 上的右平移等价 _____ (是/否)?
前者的不动元素有 _____ 个?
(A) 是, 2, (B) 否, 0, (C) 是, 3, (D) 否, 4 (E) 以上答案都不对.

三、(不定项选择题, 多选扣分, 共 15 分) 设 $F := \mathbb{Q}$, E 是 $f(x) = x^3 - 2$ 在 F 上的分裂域. ($\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4}$ 皆指实根, ω 是三次单位根)

- (1) 以下哪些域与 E 同构?
(A) $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \omega)$, (B) $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{4}, \omega)$, (C) $\mathbb{Q}(\omega\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4})$, (D) $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4})$.

(2) 在上一小题的条件下, $[E : F]$ 等于 ____.
(A) 2, (B) 3, (C) 6, (D) 9.

(3) 设 $K = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$, $L = \mathbb{Q}(\omega)$, 以下哪些结论是正确的?

- (A) L 是 F 的三次扩域,
- (B) $[E : K] = 2$.
- (C) E/F 是正规可分扩张.
- (D) $f(x)$ 在 $K[x]$ 上可约.

四、(30 分) 设 $E = \mathbb{Q}(\sqrt{n}, \sqrt{m})$, 这里 n, m 是不相同的素数.

(1) 求 $\alpha := \sqrt{n} + \sqrt{m}$ 在 $F := \mathbb{Q}$ 中的极小多项式, 并将 $\sqrt{n}, \sqrt{m}$ 及 $\sqrt{mn}$ 表示成 $F[\alpha]$ 中关于 α 的有理系数多项式形式.

(2) 证明 $E = \mathbb{Q}(\sqrt{n} + \sqrt{m})$, 并求 $[E : F]$ 及 $[E : \mathbb{Q}(\sqrt{n})]$.

(3) 求伽罗瓦群 $\text{Gal}(E/F)$.

(4) 求伽罗瓦群 $\text{Gal}(E/F)$ 中所有非平凡子群 H , 以及不动域 $\text{Inv}(H)$.

(5) 证明 E/F 是有限伽罗瓦扩张.

(6) 求出 E/F 中所有不同的中间域.

五、(15 分) 设 $\mathbb{F}_p$ 是模素数 p 的剩余类域, $F = \mathbb{F}_p(t)$ 是 $\mathbb{F}_p$ 上的有理函数域, E 是 $f(x) = x^p - t \in F[x]$ 在 F 上的分裂域.

(1) 证明: $f(x)$ 是 $F[x]$ 中不可约多项式.

(2) 证明: $f(x)$ 是 F 上不可分多项式; 并问它在 E 中有几个重根, 每个重根的重数是多少?

(3) 证明: $\text{Gal}(E/F) = \{1\}$.