

华东师范大学期末试卷 (A): 2013—2014 学年第 2 学期

课程名称: 近 世 代 数 II

教师姓名: 陆俊

学生姓名: _____

学 号: _____

专 业: _____

年级/班级: 2011 级非师范班

课程性质: 专 业 必 修

一	二	三	四	五	六	七	总分	阅卷人签名

一、(20 分) 简述以下概念和结论 (任选四项, 多写扣分).

- (1) 群作用; (2) 凯莱定理; (3) E/F 的次数;
 (4) 伽罗瓦扩张; (5) 可分多项式; (6) 望远镜定理.

二、(共 20 分) 设 $G = S_4$, $X = G$, $H = \{(1), (12)\} < G$. 考虑 G 在 X 上的共轭作用.

(1) 求 X 的所有不同的轨道.

(2) 求 $\sigma = (12)(34)$ 的稳定子群.

(3) 考虑 H 在 X 上的共轭作用, 求此时所有的不动元素.

(4) 问: H 在 X 上的左平移作用与上小题的共轭作用是否等价? 请说明理由 (提示: 利用上一小题结论).

除第七题外, 以下均假设

$$E = \mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{5}), \quad L = \mathbb{Q}(\sqrt{3} + \sqrt{5}), \quad K = \mathbb{Q}(\sqrt{3}), \quad F = \mathbb{Q}.$$

三、(15 分)

(1) 证明: E/F 是 $f(x) = (x^2 - 3)(x^2 - 5)$ 在 F 上的分裂域.

(2) 证明: $x^2 - 5$ 在 $K[x]$ 中是不可约的, 并且 $E = K[x]/(x^2 - 5)$.

(3) 求 $[E : F]$ (要求写出具体计算).

四、(10 分) 设 $\alpha = \sqrt{3} + \sqrt{5}$.

(1) 求 α 在 F 中的极小多项式, 并将 $\sqrt{3}, \sqrt{5}$ 及 $\sqrt{15}$ 表示成 $F[\alpha]$ 中关于 α 的有理系数多项式形式.

(2) 求 $[L : F]$, 并证明 $E = L$.

五、(10 分) 设 K' 是 E/F 的中间域.

(1) 证明: 如果 $[K' : F] = 2$, 那么 $K' = K$ 或者 $K' = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$.

(2) 求出 E/F 中所有不同的中间域, 并说明你的理由.

六、(15 分)

(1) 求伽罗瓦群 $\text{Gal}(E/F)$, $\text{Gal}(E/K)$ 及 $\text{Gal}(K/F)$.

(2) 求伽罗瓦群 $\text{Gal}(E/F)$ 中所有非平凡子群 H , 以及不动域 $\text{Inv}(H)$.

(3) 证明 E/F 是有限伽罗瓦扩张.

七、(共 10 分) 设 F 是特征 p 的域, $f(x) = x^p - a \in F[x]$,

(1) 问: $f(x)$ 是否有重根? 如有重根, 请求出每个重根的重数.

(2) 证明: $f(x)$ 在 F 上不可约当且仅当 $a \notin \text{Im}Fr$, 这里

$$Fr : F \longrightarrow F, \quad u \longrightarrow u^p$$

是 Frobenius 映射.