

华东师范大学期中试卷: 2013—2014 学年第 2 学期

课程名称: 近 世 代 数 教师姓名: 陆俊
 学生姓名: _____ 学 号: _____
 专 业: _____ 年级/班级: 2011 级非师范班
 课程性质: 专 业 必 修

一	二	三	四	五	六	七	总分	阅卷人签名

以下如无特别声明, G 均表示群, H 表示其子群.

一、(20 分) 简述以下概念和结论 (任选四项).

- (1) H 的共轭子群; (2) G 的换位子群; (3) G 的自同构群;
 (4) G 的中心; (5) 二面体群; (6) 中国剩余定理 (用直和语言).

二、(共 36 分) 设 $G = A_4$ 是 4 次交错群.

(1) 证明:

$$H = \{(1), (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$$

是 G 的子群.

(2) 求 H 的所有左陪集 (要求写出具体元素) 和指标 $[G : H]$.

(3) 证明: H 是 G 的正规子群.

(4) 证明: G/H 是循环群, 并写出具体元素.

(5) 设 $K = \langle (123) \rangle$ 是 G 的循环子群, 求 HK 以及 $H \cap K$ (要求写出具体元素).

(6) 证明: $H \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ (要求写出具体映射, 并验证它是同构).

三、(12 分) 设 $G = \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_6$, $G' = \mathbb{Z}_{18}$ (通常加法下).

(1) 分别求 G 和 G' 中所有的 3 阶元.

(2) 问: G 和 G' 是否同构? 请说明理由.

四、(共 20 分)

(1) 证明: 素数阶有限群必是循环群.

(2) 试用群同态基本定理直接证明

$$\sigma: \mathbb{Z}_6 \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3, \quad [a]_6 \mapsto ([a]_2, [a]_3)$$

是群同构, 这里 $[a]_k$ 表示 $\mathbb{Z}_k$ 中的剩余类.

五、(共 12 分) 设 $\sigma: \mathbb{Z}_{12} \rightarrow \mathbb{Z}_{15}$ 是群同态.

(1) 证明: 上述同态由 $[a] := \sigma([1])$ 完全确定, 并且 $5 \mid a$.

(2) 利用上述结论求出 $\mathbb{Z}_{12}$ 到 $\mathbb{Z}_{15}$ 所有的同态映射; 并对每一种同态映射分别求出它的核与像.

六、(可选附加题 共 15 分) 定义 G 上的关系

$$a \sim b \stackrel{\text{def}}{\iff} a = gbg^{-1}, \text{ 对某个 } g \in G \text{ 成立.}$$

(1) 证明: $\sim$ 是等价关系. 我们记 $[a]$ 为 a 的等价类.

(2) 设 G 为有限群. 证明:

$$|G| = |C(G)| + \sum_{[a]} [G : C(a)],$$

这里 $C(G)$ 是 G 的中心, $C(a)$ 是 a 的中心化子, $[a]$ 不重复地跑遍所有不含中心元素的等价类.