

华东师范大学期末试卷 (B): 2012—2013 学年第 2 学期

课程名称: 复变函数

教师姓名: 苗俊杰、陆俊

学生姓名: _____

学号: _____

专 业: _____

年级/班级: 2011 级师范班

课程性质: 专业必修

一	二	三	四	五	六	七	总分	阅卷人签名

一、(共 12 分)

求以下函数的全部奇点, 说明奇点类型 (若为极点, 需确定极点阶数), 求出所有极点的残数:

$$f(z) = \frac{\sin \frac{1}{z} \cdot \cos \frac{1}{z}}{e^{\frac{1}{z}} - 1}.$$

二、(共 14 分) (1) 叙述幅角原理, 并用它直接验证如下的幅角增量恒等式:

$$\Delta_C \arg f(z) \cdot g(z) = \Delta_C \arg f(z) + \Delta_C \arg g(z),$$

这里 C 是有界区域 D 的边界且为简单闭曲线, f, g 是 D 上除有限个极点外处处解析的函数, 且在 $\overline{D} = D + C$ 上连续.

(2) 设

$$f(z) = \frac{z^2 \cdot \sin z \cdot \cos z}{(z^3 + 1)(e^z - 1)^2},$$

$C: |z| = 7$, 当 z 沿 C 逆时针跑一圈后, 求幅角变化 $\Delta_C \arg f(z)$;

三、(共 12 分) 分别求 $f(z) = \frac{z-2}{z^2(z-1)}$ 在以下圆环内的 Laurent 级数.

(1) $|z| < 1$;

(2) $1 < |z-1| < +\infty$.

四、(10 分) 求 $3z^6 + 7z^5 - 13z + 2 = 0$

(1) 在圆 $|z| < 1$ 内根的个数;

(2) 在圆环 $1 < |z| < 2$ 内根的个数;

(3) 在圆环 $2 < |z| < +\infty$ 内根的个数.

五、(共 10 分) 设 $z = 0$ 是函数 $f(z)$ 的解析零点, $w = 0$ 是函数 $g(w)$ 的本性奇点. 证明: $z = 0$ 是 $g(f(z))$ 的本性奇点.

六、(共 10 分) 证明: 扩充复平面上除了有限个极点外处处解析的函数必是有理多项式函数.

七、(32 分) 分别计算以下积分 (要求写出过程):

(1)

$$\int_{|z|=1} \left(\frac{\sin z}{\cos z} \right)^2 dz,$$

(2)

$$\int_{|z|=2} \frac{z^2}{(z - \pi)^2 \cdot (z^2 + \pi)} dz,$$

(3)

$$\int_{|z|=2} \frac{z^5 + z^3 + 1}{(z^2 + 1)(z^2 + 2)(z^2 + 3)} dz,$$

(4)

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{3 - \cos \theta},$$

(5)

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2 + x \cdot \sin x}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} dx.$$