

华东师范大学期末试卷 (A): 2012—2013 学年第 2 学期

课程名称: 复 变 函 数

教师姓名: 苗俊杰、 陆俊

学生姓名: \_\_\_\_\_

学 号: \_\_\_\_\_

专 业: \_\_\_\_\_

年级/班级: 2011 级师范班

课程性质: 专 业 必 修

| 一 | 二 | 三 | 四 | 五 | 六 | 七 | 总分 | 阅卷人签名 |
|---|---|---|---|---|---|---|----|-------|
|   |   |   |   |   |   |   |    |       |

一、(36 分) 用你所学的复分析方法分别计算以下积分 (要求写出过程):

(1)

$$\int_{|z|=1} \frac{\sin z}{e^z} \cdot dz,$$

(2)

$$\int_{|z|=2} \frac{z^2 \cdot e^{\frac{1}{z}}}{(z+3) \cdot (z^2+3)} dz,$$

(3)

$$\int_{|z|=2} \frac{z^{11} + 1}{(z^2+1)^3(z^3+1)^2} dz,$$

(4)

$$\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{2 - \sin^2 \theta},$$

(5)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 + 2x + 3}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} dx.$$

(6)

$$\int_0^{+\infty} \frac{x \cdot \sin x}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} dx.$$

二、(共 12 分) 分别求  $f(z) = \frac{1}{z^2}$  在以下圆环内的 Laurent 级数.

(1)  $|z - 1| < 1$ ;

(2)  $1 < |z - 1| < +\infty$ .

三、(共 12 分)

求以下函数的全部奇点, 说明奇点类型 (若为极点, 需确定极点阶数), 求出所有极点的残数:

$$f(z) = \frac{e^{\frac{z}{1-z}} - 1}{z \sin \frac{1}{z}}.$$

四、(10 分) 求  $z^8 - 4z^5 + z - 1 = 0$

(1) 在圆  $|z| < 1$  内根的个数;

(2) 在圆环  $1 < |z| < 2$  内根的个数;

(3) 在圆环  $2 < |z| < +\infty$  内根的个数.

五、(共 10 分) 设  $f(z) = \frac{z(e^z - 1)^2}{(z^2 - 4)(\sin z + 1)^2}$ ,  $C: |z| = 7$ , 当  $z$  沿  $C$  逆时针跑一圈后, 求幅角变化  $\Delta_C \arg f(z)$ ;

六、(共 10 分) 假设  $f(z)$  在无界区域

$$D = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < +\infty\}$$

上解析, 且不恒为常数.

(1) 证明: 若  $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = A \neq \infty$ , 则  $f(z)$  在  $D \cup \{\infty\}$  不取最大模.

(2) 证明: 在 (1) 的条件假设下,  $f$  不可能是整函数 (即在整个复平面上解析).

七、(共 10 分) 简述无界区域上的残数定理与积分公式, 并用无界区域残数定理推导出无界区域上的积分公式.