

华东师范大学期中试卷: 2012—2013 学年第 2 学期

课程名称: 复 变 函 数

教师姓名: 苗俊杰、 陆俊

学生姓名: \_\_\_\_\_

学 号: \_\_\_\_\_

专 业: \_\_\_\_\_

年级/班级: 2011 级师范班

课程性质: 专 业 必 修

| 一 | 二 | 三 | 四 | 五 | 六 | 七 | 总分 | 阅卷人签名 |
|---|---|---|---|---|---|---|----|-------|
|   |   |   |   |   |   |   |    |       |

一、(共 12 分)

(1) 求  $(\frac{\sqrt{3}-i}{3+\sqrt{3}i})^8$  的欧拉指数形式以及它的实部和虚部.

(2) 求多值函数  $(1+i)^i$  的所有可能值.

二、(共 12 分) 设  $z = x + iy$  是非零复数,

$$f(z) = (ax + iy)(x^2 + by^2 + 2xyi), \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

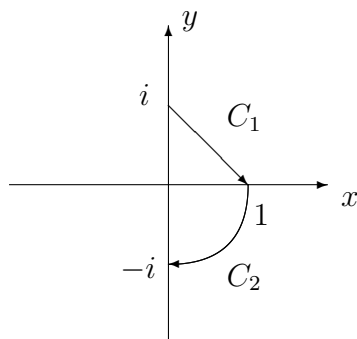
证明:  $f(z)$  在复平面  $\mathbb{C}$  上解析当且仅当  $a = b = 1$ .

三、(共 12 分)

分别沿以下路径直接计算积分  $\int_C \operatorname{Re} z \cdot \operatorname{Im} z \cdot dz$ :

(1) 线段  $C_1$ : 从  $z = i$  到  $z = 1$ ;

(2) 圆弧  $C_2$ :  $z = e^{i\theta}$ ,  $\theta$  从 0 到  $-\frac{\pi}{2}$ ;

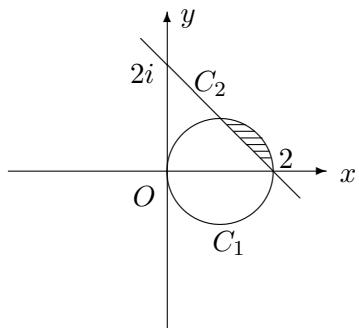


四、(12 分) 试用柯西积分公式推导出柯西积分定理.

五、(12 分) 求积分  $\int_C \frac{e^z}{z^2(z^2+4)} dz$ , 这里  $C: |z+2i|=3$ .

六、(18 分) (1) 设区域  $\mathcal{D}$  是由曲线  $C_1, C_2$  围成的 (见图), 试求出它在分式线性变换  $w = \frac{z-1}{z}$  下的像区域及其边界, 并画出其图像.

$$C_1: |z-1|=1, \quad C_2: x+y=2.$$



(2) 设  $\mathcal{D}$  是上半平面  $\{z \mid \operatorname{Im} z > 0\}$ . 求分式线性变换  $w = f(z)$  使得  $f(1) = -i$ ,  $f(1+i) = \frac{1}{5} - \frac{2i}{5}$ , 且像区域  $f(\mathcal{D})$  为单位圆盘内部.

七、(12 分) 设  $\mathcal{D}$  是由围线  $C$  围成的有界区域,  $f(z)$  在  $\mathcal{D}$  上解析, 在  $\overline{\mathcal{D}} = \mathcal{D} + C$  上连续, 且不恒为常数. 证明: 如果  $|f(z)| = 1, \forall z \in C$ , 则  $f(z)$  在  $\mathcal{D}$  内至少有一个零点.

八、(10 分) 设  $w = f(z)$  是分式线性变换. 如果一个点  $z_0$  满足  $z_0 = f(z_0)$ , 我们就称  $z_0$  是  $f$  的不动点. 证明:  $f$  最多有两个不动点; 如果  $z_1, z_2$  是两个有限的不动点, 那么  $f'(z_1)f'(z_2) = 1$ .