

华东师范大学期末试卷 (A): 2013—2014 学年第 1 学期

课程名称: 近世代数 I 教师姓名: 陆俊
 学生姓名: _____ 学 号: _____
 专 业: _____ 年级/班级: 2011 级非师范班
 课程性质: 专 业 必 修

一	二	三	四	五	六	七	总分	阅卷人签名

以下所有环均假设为交换幺环. $\mathbb{Z}_N$ 表示模 N 的剩余类环.

一、(15 分) 简述以下概念和结论 (任选三项, 多写扣分).

- (1) 素理想;
- (2) 整环中的不可约元;
- (3) 唯一分解整环;
- (4) 中国剩余定理 (用直和的语言).

二、(共 15 分) 设 $R = \mathbb{Z}_{30}$.

- (1) 求 $\mathbb{Z}_{30}$ 中所有不同的理想 (多写扣分).
- (2) 指出其中哪些是素理想? 哪些是极大理想?

三、(15 分) 考虑直和 $R = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4$.

- (1) 写出 R 中所有元素.
- (2) 指出其中哪些是零因子? 哪些是乘法可逆元?
- (3) 利用上述讨论, 证明: $R \not\cong \mathbb{Z}_8$.

四、(共 15 分) 设 $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$, $N(r) := |r|^2$ 表示高斯整数 r 的范数.

$$\alpha = 1 + 8\sqrt{-1}, \quad \beta = 2 - 4\sqrt{-1}.$$

- (1) 分别求 α, β 在 R 中的素因子分解 (在相伴意义下).
- (2) 求 α, β 的最大公因子 (在相伴意义下).
- (3) 求带余除式

$$\alpha = \beta \cdot q + r, \quad N(r) < N(\beta)$$

中的高斯整数 q 和 r .

五、(共 12 分)

设 I 和 J 是环 R 的理想, 证明: 如下集合

$$I + J = \{a \in R \mid a = r + s, r \in I, s \in J\}.$$

也是 R 的理想.

六、(共 16 分) 设 $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$.

(1) 证明:

$$\sigma : \mathbb{Z}[\sqrt{-1}] \longrightarrow \mathbb{Z}_2, \quad a + b\sqrt{-1} \rightarrow [a + b]$$

是满同态.

(2) 证明:

$$\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]/(-1 + \sqrt{-1}) \cong \mathbb{Z}_2.$$

七、(共 12 分) 设 K 是环 R 中所有极大理想的交. 证明: $a \in K$ 当且仅当对任何 $b \in R$, $1 - ab$ 都是乘法可逆元.