

华东师范大学期中试卷: 2013—2014 学年第 1 学期

课程名称: 近 世 代 数 教师姓名: 陆俊
 学生姓名: _____ 学 号: _____
 专 业: _____ 年级/班级: 2011 级非师范班
 课程性质: 专 业 必 修

一	二	三	四	五	六	七	总分	阅卷人签名

一、(共 12 分) 设 $\mathbb{H}$ 是哈密顿四元数体.
 试求所有满足

$$\alpha \cdot \mathbf{i} \cdot \alpha^{-1} = \mathbf{j}$$

的四元数 $\alpha \in \mathbb{H}$.

二、(共 28 分) 请判断以下结论正确与否. 如正确, 请给出证明;
 如果错误, 请举出反例.

(1) 映射

$$\sigma: \mathbb{Q}[x] \rightarrow \mathbb{Q}(x), \quad f(x) \rightarrow f\left(\frac{1}{x}\right).$$

是从多项式环 $\mathbb{Q}[x]$ 到有理函数域 $\mathbb{Q}(x)$ 的环同态.

(2) 整环到域的非零环同态一定是单同态.

(3) 不存在 $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ 和 $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$ 之间的域同构.

(4) 任何域都不可能和它的真子域同构.

三、(14 分)

(1) 求 $\mathbb{Z}_{18}$ 所有的零因子和乘法可逆元.

(2) 求出 $\mathbb{Z}_4$ 到 $\mathbb{Z}_{12}$ 的所有环同态.

四、(14 分)

设 R 是交换幺环, $a \in R$, 如果存在正整数 n , 使得 $a^n = 0$, 则称 a 为
 幂零元.

- (1) 证明: 对任何幂零元 $a \in R$, $1_R - a$ 必为 R 的乘法可逆元.
- (2) 证明: R 的幂零元全体构成 R 的子环.

五、(共 16 分)

设

$$\mathbb{Z}[\theta] = \{a + b\theta \mid a, b \in \mathbb{Z}\},$$

这里 $\theta = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{-3}}{2}$ 是三次单位根.

- (1) 证明: $\mathbb{Z}[\theta]$ 是整环, 其分式域为 $\mathbb{Q}(\theta)$.
- (2) 求 $\mathbb{Q}(\theta)$ 到自身的所有非零域同态.

六、(16 分) 假设 $\sigma: R \rightarrow S$ 是交换幺环之间的非零同态, $a = \sigma(1_R)$.

- (1) 证明: 如果 $a \neq 1_S$, 那么 $a - 1_S$ 必是 S 中的零因子.
- (2) 假设 R, S 都是整环, F 和 G 分别是 R 和 S 的分式域, 证明: σ 可以扩充为域同态 $\tilde{\sigma}: F \rightarrow G$ 的充分必要条件是 σ 是单同态.