

华东师范大学期末试卷 (A): 2012—2013 学年第 2 学期

课程名称: 初 等 数 论 任课教师: 陆 俊
 学生姓名: _____ 学 号: _____
 专 业: 非 师 范 年级/班级: 2010 级
 课程性质: 专 业 必 修

一	二	三	四	五	六	七	总分	阅卷人签名

一、(24 分) 分别求以下同余方程的剩余类解 (要求写出过程):

(1) $x^2 \equiv 3 \pmod{11 \cdot 13}$.

(2) $x^7 + x + 4 \equiv 0 \pmod{3^3}$.

二、(10 分) 求以下雅克比符号或勒让德符号的值 (要求写出过程):

$$\left(\frac{21}{37}\right), \quad \left(\frac{-22}{91}\right)$$

三、(28 分) 已知 $g = 2$ 是模 19 的原根:

(1) 求指标 $\text{ind}_g(-1)$, $\text{ind}_g 3$ 和 $\text{ind}_g 13$;

(2) 求阶数 $\text{ord}_{19}(-3)$ 和 $\text{ord}_{19} 13$.

(3) 求所有阶数为 3 的剩余类.

(4) 求所有 6 次剩余类.

四、(21 分) 设 p 是奇素数, g, g' 都是模 p 的原根,

(1) 证明: gg' 不可能是模 p 的原根.

(2) 证明: $(-g)$ 是原根当且仅当 $p \equiv 1 \pmod{4}$.

(3) 试求所有不同原根之积在模 p 下的最小非负剩余.

五、(10 分) 设 $n \geq 4$, 证明: $n^2 + 3$ 必含大于 3 的奇素因子, 并且每个这样的奇素因 p 必满足

$$p \equiv 1 \pmod{6}. \quad (1)$$

反之, 任何满足式 (1) 的奇素因子 p 必定整除无穷多个形如 $n^2 + 3$ 的整数.

六、(7 分) 设 p 是奇素数, $k, d(> 1)$ 都是 $p-1$ 的因子. 设 X 是由模 p 下所有阶数为 d 的既约剩余类组成的集合, Y 是模 p 下所有 k 次剩余类组成的集合. 证明:

$$Y = X \cup \{\bar{1}\}$$

当且仅当 $p-1 = dk$, 且 d 是素数.