

华东师范大学期中试卷: 2012—2013 学年第 2 学期

课程名称: 初 等 数 论 任课教师: 陆 俊
 学生姓名: _____ 学 号: _____
 专 业: 非 师 范 年级/班级: 2010 级
 课程性质: 专 业 必 修

一	二	三	四	五	六	七	总分	阅卷人签名

一、(20 分) 分别求以下同余方程 (组) 的最小非负剩余类解 (要求写出过程):

(1) $31x \equiv 1 \pmod{53}$.

(2) $21x + 24 \equiv 0 \pmod{33}$.

(3)

$$\begin{cases} x \equiv 2 \pmod{2}, \\ x \equiv 4 \pmod{5}, \\ x \equiv 8 \pmod{7}. \end{cases}$$

(4) $x \equiv 7^{2005} \pmod{54}$.

二、(24 分) 分别求以下不定方程 (组) 的整数解 (要求写出过程):

(1) $34x + 26y = 100$;

(2) $6x + 15y + 10z = 100$, 要求 $x, y, z > 0$.

(3)

$$\begin{cases} x + 9y - 31z = 22, \\ x + 4y - 9z = 39, \end{cases}$$

要求 $x, y, z \geq 0$.

(4) $X^2 - Y^2 = 3Z^2$, 要求 $(X, Y) = 1$, Z 是偶数, 并且 $Y \equiv 1 \pmod{3}$.

三、(12 分) 设 $a = 231$, $b = 627$.

(1) 用辗转相除法求 a 和 b 的最大公约数 (a, b) ;

(2) 分别求 a 和 b 的标准素因子分解式;

(3) 求 a 和 b 的最小公倍数 $[a, b]$.

(4) 分别求欧拉函数值 $\varphi(a)$ 和 $\varphi(b)$.

四、(20 分) (1) 证明如下不定方程无正整数解:

$$X^4 + 4Y^4 = Z^2.$$

(2) 问: 不定方程 $x^2 + y^2 = 12z^2$ 是否有正整数解? 如有解, 则求之; 如无解, 请证之.

五、(24 分) 设 p, q 是奇素数, $a > 1$ 满足 $a \not\equiv 0, 1 \pmod{p}$. 设 d 是满足 $a^d \equiv 1 \pmod{p}$ 的最小正整数.

(1) 证明: $d \mid p-1$.

(2) 证明: d 是偶数当且仅当存在 $m > 0$ 使得 $a^m \equiv -1 \pmod{p}$.

(3) 证明: 对任何正整数 n , 都有 $a^{p^{n-1}} \not\equiv 1 \pmod{p}$.

(4) 证明:

$$\left(\frac{a^p - 1}{a - 1}, a - 1 \right) = 1.$$

(5) 证明: 如果 p, q 满足

$$a^q \equiv -1 \pmod{p},$$

则要么 $a \equiv -1 \pmod{p}$, 要么 $p \equiv 1 \pmod{2q}$.

六、(可选附加题 10 分) 设 $p > 3$ 是奇素数, 对任何小于 p 的正整数 s , 它在模 p^2 的逆元记为 s^* , 证明:

$$1^* + 2^* + \cdots + (p-1)^* \equiv 0 \pmod{p^2}.$$