

华东师范大学期末试卷(B): 2011—2012 学年第 2 学期

课程名称: 复 变 函 数

学生姓名: _____

学 号: _____

专 业: _____

年级/班级: 2010 级

课程性质: 专 业 必 修

一	二	三	四	五	六	七	总分	阅卷人签名

一、(12 分) 简述有界区域的残数定理, 并用它重新推导柯西积分和导数公式.

二、(共 15 分) 分别求 $f(z) = \frac{1}{z} \sin \frac{1}{z-1}$ 在以下圆环内的 Laurent 级数 (均写出前四项).

- (1) $0 < |z| < 1$;
- (2) $1 < |z| < +\infty$;
- (3) $1 < |z-1| < +\infty$.

三、(18 分)

- (1) 求 $z^6 - 2z^4 + 8z - 4 = 0$ 在圆 $|z| < 1$ 内根的个数; 进一步求其在圆环 $1 < |z| < 2$ 内根的个数;
- (2) 证明: 方程 $z^{4n} - z^2 + 1 = 0$ 在右半平面内恰有 $2n$ 个根.

四、(共 13 分)

判断以下函数的奇点类型 (如果是极点, 需指出级数); 并求极点的残数.

(1)

$$f(z) = \frac{e^{\frac{1}{z}}}{\sin \frac{1}{z}},$$

(2)

$$g(z) = \frac{\tan \pi z}{1 - z^2}.$$

五、(共 12 分)

设 $f(z) = \frac{(e^z-1)^4}{(\sin z)^3(z^2-1)}$, $C: |z| = 4$, 当 z 沿 C 逆时针跑一圈后, 求幅角变化 $\Delta_C \arg f(z)$;

六、(共 30 分)

利用残数定理或残数总和定理, 分别计算以下积分 (要求写出过程):

(1)

$$\int_{|z|=3} \frac{z^9}{(z^2-1) \cdot (z^4-1)^2} dz,$$

(2)

$$\int_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{z^5 \sin \frac{1}{z}}{(z^4-4)(z-2)} dz,$$

(3)

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + \cos^2 \theta},$$

(4)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x^2}{x^4+16} dx,$$

(5)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x+1) \cos x}{x^2+1} dx.$$