

华东师范大学期末试卷(A): 2011—2012 学年第 2 学期

课程名称: 复 变 函 数

学生姓名: _____

学 号: _____

专 业: _____

年级/班级: 2010 级

课程性质: 专 业 必 修

一	二	三	四	五	六	七	总分	阅卷人签名

一、(16 分) 分别求以下各函数的全部奇点, 说明奇点类型 (若是极点, 需确定级数); 求出所有极点的残数.

(1)

$$f(z) = \frac{\cos z}{z \sin \frac{1}{z}},$$

(2)

$$g(z) = \frac{1}{z(e^{\frac{1}{z-1}} - 1)}.$$

二、(共 15 分) 分别求 $f(z) = \frac{1}{z(z^2+4)}$ 在以下圆环内的 Laurent 级数.

(1) $0 < |z| < 2$;

(2) $2 < |z| < +\infty$;

(3) $0 < |z - 2i| < 2$.

三、(共 30 分)

利用残数定理或残数总和定理, 分别计算以下积分 (要求写出过程):

(1)

$$\int_{|z|=3} \frac{z^{23}}{(z^3 + 1)^4 \cdot (z^4 + 1)^3} dz,$$

(2)

$$\int_{|z|=2} \frac{z^2 e^{\frac{1}{z}}}{(z^2 - 3)(z - 3)} dz,$$

(3)

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5 + 3 \sin \theta},$$

(4)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 - x + 1}{x^4 + 1} dx,$$

(5)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} dx.$$

四、(16 分)

(1) 求 $z^7 - z^4 + 5z^2 - 2 = 0$ 在圆 $|z| < 1$ 内根的个数; 进一步求其在圆环 $1 < |z| < 2$ 内根的个数;

(2) 设 $\lambda \in \mathbb{R}$ 且 $\lambda \neq 1$, 证明: 方程 $z^4 + \lambda z + 1 - \lambda = 0$ 在右半平面内要么恰有两个根, 要么恰有三个根. 进一步, 求实数 λ 的范围, 使得方程在右半平面内恰有三个根.

五、(共 12 分)

设 $f(z) = \frac{(\cos z - 1)^3}{(4 + z^2)(e^z - 1)^2}$, $C: |z| = 7$, 当 z 沿 C 逆时针跑一圈后, 求幅角变化 $\Delta_C \arg f(z)$;

六、(共 11 分)

请简要叙述无界区域内的残数定理 (要写明定理条件), 并用它证明无界区域的均值公式:

$$f(\infty) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(Re^{i\theta}) d\theta, \quad r < R < +\infty,$$

这里 $f(z)$ 在 $|z| \geq r$ 上解析, $z = \infty$ 是 $f(z)$ 的可去奇点.