

《纤维化与曲线模空间理论》期末考卷

陆俊

2011 年6月21 日

试题 考虑以下平面曲线族 $\{C_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{P}^1}$

$$Y^2 Z^{n-2} = \sum_{k=1}^n a_k X^k Z^{n-k} + \lambda Z^n,$$

这里 $[X, Y, Z] \in \mathbb{P}^2$ 是齐次坐标.

(1) 证明: $P_0 = [0, 1, 0]$ 是 $\{C_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{P}^1}$ 的基点, 它也是每个 C_λ ($\lambda \neq \infty$) 的 $(n-2)$ 重奇点 (在合适的坐标选取下, 给出局部标准方程).

(2) 设 Δ_λ 是多项式 $f_\lambda(x) = \sum_{k=1}^n a_k x^k + \lambda$ 的判别式 ($\lambda \neq \infty$).

证明: 如果 $\Delta_\lambda \neq 0$, 那么 C_λ 除 P_0 外无其他奇点; 如果 $\Delta_\lambda = 0$, 设 x_0 是 $f_\lambda(x)$ 的 k 重根, 那么 $P = [x_0, 0, 1]$ 是 C_λ 的奇点. 请确定该奇点的类型 (在合适的坐标选取下, 给出局部标准方程).

(3) 设 $f: S \rightarrow \mathbb{P}^1$ 是由上述曲线族爆发所诱导的纤维化, F_λ 是 C_λ 对应的纤维. 假设某条奇异纤维 F_λ ($\lambda \in \mathbb{P}^1$) 具有周期的拓扑单值, 请确定 F_λ 的对偶图, 并计算它的亏格以及奇异纤维陈数 (也需要考虑 $\lambda = \infty$ 的情况).

(4) 证明: f 是 isotrivial 当且仅当存在 $\lambda_0 \in \mathbb{C}$, 使得 $f_{\lambda_0}(x)$ 有一个 n 重根. 进一步, 在条件成立时, 请计算 f 的亏格以及整体不变量, 并确定所有的奇异纤维.

(5) 在上一小题的条件下, 试利用二次覆盖方法重新计算其整体不变量. 对于 f 垂直部分 $\mathcal{V}_f$ 及基本群 $\pi_1(S)$ 的结构, 你能得到什么结论?

(6) 取 $f_\lambda(x) = x^n + x + \lambda$ ($n \geq 3$). 试求诱导纤维化 f 的稳定约化模型 $\tilde{f}: \tilde{S} \rightarrow \tilde{C}$, 并求 f 的模不变量.