

华东师范大学期中试卷: 2010—2011 学年第 2 学期

课程名称: 复 变 函 数

学生姓名: _____

学 号: _____

专 业: _____

年级/班级: 2009 级

课程性质: 专 业 必 修

一	二	三	四	五	六	七	总分	阅卷人签名

一、(共 12 分) 求以下表达式的值 ($-\pi < \arg z < \pi$):

- (1) $\cos(2i)$; (2) $|(1+i)^6|$; (3) $\operatorname{Re}(e^{1+i})$; (4) $\arg\left(\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}\right)$.

二、(16 分) 求以下多值函数的所有可能值:

- (1) i^{2i} ; (2) $(1-i)^{\frac{1}{3}}$; (3) $\ln(1+i)$; (4) $\arcsin i$;

三、(共 15 分) 设 $z = x + iy$ 是非零复数,

$$f(z) = \frac{ax}{x^2 + y^2} - i \frac{by}{x^2 + y^2}, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

- (1) 将函数 $f(z)$ 写成关于 z 和 $\bar{z}$ 的复形式;
 (2) 分别计算形式偏导数 $\frac{\partial f}{\partial z}$ 和 $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$, 以及实偏导数 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial f}{\partial y}$;
 (3) 证明: $f(z)$ 在 $\mathbb{C} - \{0\}$ 上解析当且仅当 $a = b$.

四、(共 15 分)

- (1) 证明: $\sin(2z) = 2 \sin z \cos z$ 对任何复数 z 成立.
 (2) 证明: $f(z) = z + \frac{\alpha}{z}$ ($\alpha \neq 0$) 在空心单位圆域上单叶解析当且仅当 $|\alpha| \geq 1$.

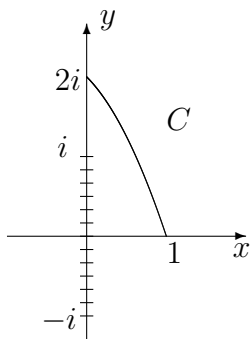
五、(14 分) 设 $f(z) = \sqrt{(z+i)(z-i)}$.

(1) 证明: $z = \infty$ 不是支点, 而 $z = i, -i$ 是支点;

(2) 当 z 沿路径 C 从 1 连续走到 $2i$ 时, 分别求以下幅角变化:

$$\Delta_C \arg(z+i), \quad \Delta_C \arg(z-i);$$

(3) 已知 $f(1) > 0$, 取支割线如下图, 当 z 沿路径 C 从 1 连续走到 $2i$ 时, 求 $f(2i)$.



六、(14 分) 在反演变换 $w = \frac{1}{z}$ 下, 分别求以下区域对应的像区域.

(1) 开圆盘 $\mathcal{D}_1: \{z \mid 0 \leq |z+i| < 1\}$;

(2) 半平面 $\mathcal{D}_2: \{z \mid \operatorname{Im}(iz) < 1\}$.

七、(14 分) 设 $\mathcal{D}$ 是上半平面 $\{z \mid \operatorname{Im} z > 0\}$.

(1) 求分式线性变换 $w = f(z)$ 使得 $f(0) = 2$, $f(i) = 1+i$, 且像区域 $f(\mathcal{D})$ 仍为上半平面;

(2) 求分式线性变换 $w = f(z)$ 使得 $f(1+i) = 0$, $\arg f'(1+i) = -\frac{\pi}{2}$, 且像区域 $f(\mathcal{D})$ 为单位圆盘 $\{w \mid 0 \leq |w| < 1\}$.